Database di Esercizi per corso Matematica I anno

Andrea C. G. Mennucci

(versione June 3, 2018)

Raccolta di esercizi e elementi di teoria proposti nelle esercitazioni del corso interno di Matematica rivolto agli allievi del I anno della Scuola Normale Superiore.

`[this is a draft there are a lot of errors//questa è una bozza vi sono molti errori]`

Copyright

Notazioni

- $\mathbb{N}$ sono i numeri naturali, incluso lo zero.
- $\mathbb{Z}$ sono i numeri interi.
- $\mathbb{Q}$ sono i numeri razionali.
- $\mathbb{R}$ è la retta reale.
- $\mathbb{C}$ sono i numeri complessi.
- Dato un insieme $I \subset \mathbb{R}$ vi sono vari modi di dire che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è **monotona**. Elenchiamo innanzitutto i diversi tipi di monotonia

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \tag{0.1}$$

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \tag{0.2}$$

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \tag{0.3}$$

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) \tag{0.4}$$

Purtroppo nell'uso comune vi sono diverse e incompatibili convenzioni usate nel nominare le precedenti definizioni. Ecco una tabella, in cui ogni convenzione è una colonna.

(0.1)	non decrescente	crescente	debolmente crescente
(0.2)	crescente	strettamente crescente	strettamente crescente
(0.3)	non crescente	decrescente	debolmente decrescente
(0.4)	decrescente	strettamente decrescente	strettamente decrescente

In questo testo viene usate la convenzione nell' ultima colonna.

(La prima colonna è, a mio parere, problematica. Spesso porta all'uso, purtroppo comune, di frasi come "f è una funzione non decrescente" *o* "prendiamo una funzione f non decrescente"*; questa può dare adito a confusione: sembra dire che f non soddisfa il requisito di essere decrescente, ma non specifica se è monotona. Chi segue la convenzione in prima colonna (a mio parere) dovrebbe sempre dire anche "monotona").*

1 Fondamenti

1.1 Logica

Nelle prossime sezioni daremo alcune definizioni; queste sono semplificate, ma sufficienti per affrontare gli esercizi. I lettori interessati a un approfondimento possono consultare un libro di logica quale ad esempio [3].

1.1.1 Logica proposizionale

Definizione 1.1 *Una **logica proposizionale** è un linguaggio, con associato un alfabeto di variabili (che per comodità nel seguito identificheremo con l'alfabeto Italiano) e la famiglia di connettivi* [1]

negazione, NOT	$\neg$
congiunzione, AND	$\wedge$
disgiunzione, OR	$\vee$
implicazione	$\Rightarrow$
doppia implicazione	$\Leftrightarrow$

a questi simboli aggiungiamo le parentesi, che sono usate per raggruppare parti della formula (quando vi sia il rischio di ambiguità); le parentesi sono omesse quando la precedenza degli operatori lo permette; gli operatori sono elencati nella precedente lista in ordine decrescente di precedenza. [2]

Definizione 1.2 *Le **formule ben formate** sono*

- *formule atomiche, cioè composte da una sola variabile, oppure*
- *una formula del tipo $\neg(\alpha)$ dove α è una formula ben formata, oppure*
-
  - *una formula del tipo $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$, oppure*
  - *una formula del tipo $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$, oppure*
  - *una formula del tipo $(\alpha) \vee (\beta)$, oppure*
  - *una formula del tipo $(\alpha) \wedge (\beta)$,*

  dove α, β sono due formule ben formate.

Si può determinare se una formula è ben formata facendo un numero finito di controlli usando le regole precedenti: infatti le regole stabiliscono che ogni formula ben formata si deve poter spiegare in termini di formule ben formate che sono più corte di lei. Dunque la affermazione "*questa formula è ben formata*" è "decidibile". [3]

Definizione 1.3 *Una **valutazione** assegna ad ogni variabile un valore "vero" oppure "falso". Conoscendo il valore delle variabili, e usando le note tabelle di verità per i connettivi, si calcola il valore di ogni formula ben formata.*

Dunque una formula ben formata è una "*proposizione logica*" in quanto assume valore di verità o di falsità, a seconda del valore dato alle sue variabili libere.

Per comodità aggiungiamo al linguaggio anche le costanti V e F che sono rispettivamente sempre vere e sempre false, in ogni valutazione. [4] Nella costruzione delle formule ben formate vengono trattate come le variabili.

Notate che non abbiamo introdotto il connettivo di uguaglianza "$=$". Quando tutte le variabili possono assumere solo i valori vero/falso, l'uguaglianza $a = b$ può essere interpretata come $a \iff b$. In contesti più generali (come nel caso della teoria degli insiemi) invece "l'uguaglianza" necessita di una precisa definizione.

[1] Nei testi di logica spesso viene usato il simbolo $\to$ per l'implicazione e il simbolo $\leftrightarrow$ per la doppia implicazione

[2] Alcuni studiosi usano diversi ordini di precedenza, in particolare alcuni considerano "l'implicazione" precedente alla rispetto alla "disgiunzione". Per questo è sempre meglio usare le parentesi per raggruppare le parti di frase dove questi connettivi vengono usati.

[3] La definizione precisa di "decidibile" esula da queste note. Pensate a un algoritmo scritto al computer che, data una formula, con un numero finito di passaggi risponda "ben formata" oppure "non ben formata". Notate però che il numero di controlli da fare cresce esponenzialmente con la lunghezza della formula.

[4] Le costanti V e F possono essere eliminate dalla logica definendole come $V = A \vee \neg A$ e $F = \neg V$.

E1.4 Dite quali formule sono ben formate, e aggiungete le parentesi per evidenziare l'ordine di precedenza.

$$
\begin{aligned}
a \land \neg b \land c \land d \\
\neg a \lor b \land c \Rightarrow d \\
a \Rightarrow \neg b \land c \lor d \\
a \land b \lor c \Leftrightarrow \neg c \Rightarrow d \\
a \lor b \neg c \lor d
\end{aligned}
$$

E1.5 Una formula ben formata nella logica proposizionale è una **tautologia** se per ogni *valutazione* la formula è sempre vera. Supponiamo che A, B, C siano formule ben formate. Mostrate che le seguenti proprietà dei connettivi sono tautologie. [5]

$A \Rightarrow A$	legge dell'identità	
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	legge della doppia negazione	
$A \lor A \Leftrightarrow A \ , \ \ A \land A \Leftrightarrow A$	leggi di idempotenza	
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	legge di contrapposizione	
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \lor A) \Leftrightarrow \neg(B \land \neg A)$	equivalenza di implicazione, congiunzione e disgiunzione	(1.1)
$A \land B \Leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$	prima legge di De Morgan	(1.2)
$A \lor B \Leftrightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$	seconda legge di De Morgan	(1.3)
$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$	proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione	
$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$	proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione	
$A \land B \Leftrightarrow B \land A$	proprietà commutativa di $\land$	
$A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$	proprietà commutativa di $\lor$	
$A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$	proprietà associativa di $\land$	
$A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$	proprietà associativa di$\lor$	

Queste due ultime proprietà permettono di omettere le parentesi in sequenze di congiunzioni oppure di disgiunzioni.

Le proprietà (1.1),(1.2),(1.3) dicono che potremmo fondare tutta la logica sui soli connettivi $\neg$ e $\land$, (o su $\neg, \lor$).

Altre tautologie importanti, spesso usate nel ragionamento logico.

$A \lor \neg A$	legge del terzo escluso	
$\neg(A \land \neg A)$	legge di non contraddizione	
$(A \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	modus ponens	
$(\neg B \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$	modus tollens	(1.4)
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente	
$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	affermazione del conseguente	
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \ \Rightarrow \ ((A \land C) \Rightarrow C)$	esportazione	
$((A \Rightarrow B) \land (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \land C))$	dimostrazione per parti	
$((A \Rightarrow C) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \lor B) \Rightarrow C)$	dimostrazione per casi	
$((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	sillogismo ipotetico, o transitività dell'implicazione	
$(A \lor (A \land B)) \Leftrightarrow A \land (A \lor B) \Leftrightarrow (A \lor F) \Leftrightarrow (A \land T) \Leftrightarrow A$	leggi di assorbimento	
$F \Rightarrow B$	prima legge di Pseudo Scoto, o ex falso sequitur quodlibet	
$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	seconda legge di Pseudo Scoto	
$(\neg A \Rightarrow F) \Leftrightarrow A$	dimostrazione per assurdo	
$((\neg A \land B) \Rightarrow F) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$	dimostrazione per assurdo, con ipotesi e tesi	
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis	(1.5)

[5] Queste liste sono tratte dalla Sezione 1.3 in [3], oppure [8].

1.1.2 Logica del primo ordine

Nella logica del primo ordine si aggiungono i connettivi $\forall$, che si legge *"per ogni"* e $\exists$, che si legge *"esiste"*. Dobbiamo dunque allargare la famiglia delle **formule ben formate**.

Definizione 1.6 *Una formula è ben formata se soddisfa tutte le regole nella lista in 1.2 e questa regola aggiuntiva:* "data una formula ben formata ϕ dove la variabile x è libera, una formula della forma "$\forall x, \phi$", o "$\exists x, \phi$" è una formula ben formata."

*Diremo che una variabile x è **libera** in una formula ben formata se*

- *la formula è atomica e la variabile x appare in essa; oppure se*
- *la formula è della forma $\neg\alpha$ e la variabile x è libera in α; oppure anche se*
- *la formula è della forma $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \beta, \alpha \iff \beta$ (o altro connettivo logico introdotto in seguito) e la variabile x è libera in α oppure in β.*

Dunque nelle formule $(\forall x, \phi)$ o $(\exists x, \phi)$, la variabile x non è più libera; usa dire che "la variabile è quantificata". *(La variabile x torna ad essere libera se viene riusata in un altro pezzo della formula; questo è sintatticamente lecito, ma rende meno leggibile la formula).*

Nella precedente discussione la variabile x può essere sostituita con ogni altra variabile.

Si assume come assioma che

$$\neg(\forall x, \phi) \Leftrightarrow (\exists x, \neg\phi) \ . \tag{1.6}$$

(Nella Sez. 2.1 in [3] anzi $(\forall x, \phi)$ viene presentato come abbreviazione di $\neg(\exists x, \neg\phi)$).

Notate che, in molti esempi, si suppone che le variabili quantificate siano elementi di un "insieme". Usiamo qui il termine "insieme" in maniera informale, si veda la nota 1.18. Dato che un elemento di un insieme potrebbe non avere un valore di verità/falsità, arricchiamo il linguaggio aggiungendo le "*proposizioni logiche*".

Definizione 1.7 *Una **proposizione logica** ϕ è un' asserzione che assume valore di verità o di falsità dipendentemente dal valore dato alle sue variabili libere, e solo da quello.*

Consideriamo le proposizioni logiche come atomi nella costruzione delle formule ben formate.

E1.8 Siano X, Y insiemi. Siano ϕ, ψ proposizioni logiche; x, a sono variabili libere in ϕ, e y, b sono libere in ψ. Assumiamo inoltre che a, b possano essere solo vere o false, mentre $x \in X, y \in Y$. Considerate le seguenti formule. Quali sono ben formate? Quali variabili sono libere in esse?

$$\begin{gathered} b \wedge (\forall x, \phi) \\ (\exists y, \psi) \vee (\forall x, \phi) \\ \forall x, \forall b, (\phi \wedge (\psi \vee b)) \\ a \vee (\forall x, \forall a, \phi) \\ (\exists x, \psi) \wedge (\forall x, \phi) \end{gathered}$$

E1.9 Consideriamo una proposizione $P(u, \ell)$ dipendente da due variabili libere u (che prende valori nell'insieme degli uomini), e ℓ (nell'insieme dei lavori), e che è così formulata: *'L'uomo u sa fare il lavoro ℓ'*.

Esprimete in Italiano le seguenti formule

$$\exists u \exists \ell P(u, \ell) \ , \forall u \exists \ell P(u, \ell) \ , \exists \ell \forall u P(u, \ell) \ , \forall \ell \exists u P(u, \ell) \ , \exists u \forall \ell P(u, \ell) \ , \forall u \forall \ell P(u, \ell) \ .$$

E1.10 Quali implicazioni vi sono fra le precedenti formule?

E1.11 Si verifichi che

$$\Big((\forall x, \, \varphi(x)) \wedge (\forall y, \, \psi(y)) \Big) \iff \Big(\forall x \, (\varphi(x) \wedge \psi(x) \Big)$$

E1.12 Dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione dipendente da una variabile libera x, usa scrivere

$$\exists! x \in A, P(x)$$

quando vi è uno e un solo elemento x di A per cui $P(x)$ è vera. Definite questa notazione con una formula ben formata.

1.2 Frequentemente, definitivamente

Siano $\mathbb{N}$ i numeri naturali.

Definizione 1.13 (frequentemente, definitivamente) *Sia* P(n) *una proposizione logica che dipende da una variabile libera* $n \in \mathbb{N}$. *Diremo che*

P(n) *vale definitivamente in* n *se*	$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m$ *vale* P(n) *;*
P(n) *vale frequentemente in* n *se*	$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m$ *per cui* P(n) *.*

Questa definizione è equivalente alla definizione 2.3 per variabile reale $x \to \infty$; si può ulteriormente generalizzare, come vedremo in 1.94.

In Inglese si può tradurre *frequentemente* come *frequently* e *definitivamente* come *eventually*; ma questi termini non sono molto usati.

E1.14 Notate che $\boxed{\text{\textit{P(n)} vale definitivamente in } n}$ implica $\boxed{\text{\textit{P(n)} vale frequentemente in } n}$

E1.15 Notate che $\boxed{\text{(non \textit{P(n)}) vale frequentemente in } n}$ se e solo se $\boxed{\text{non } \left(\text{\textit{P(n)} vale definitivamente in } n\right)}$.

E1.16 Notate che $\boxed{\text{\textit{P(n)} vale frequentemente in } n}$ se e solo se $\boxed{\text{\textit{P(n)} vale per un numero infinito di } n}$.

(Questa equivalenza non è vera quando la variabile è reale. Si veda invece E1.95 per la corretta formulazione).

E1.17 Siano ora $P(n), Q(n)$ due proposizioni.

- Dite quali implicazioni vi sono fra
  - "$(P(n) \wedge Q(n))$ vale definitivamente" e
  - "$P(n)$ vale definitivamente e $Q(n)$ vale definitivamente".
- Similmente per le proposizioni
  - "$(P(n) \vee Q(n))$ vale definitivamente" e
  - "$P(n)$ vale definitivamente oppure $Q(n)$ vale definitivamente".

Formulate inoltre simili risultati per la nozione di "frequentemente".

1.3 Teoria degli insiemi

Nella teoria degli insiemi si aggiunge il connettivo "$\in$" ; dati due insiemi z, y la formula $x \in y$ si legge "x *appartiene a* y" o più semplicemente "x *è in* y", e indica che x è un elemento di y. Si aggiunge anche il connettivo $a = b$ fra insiemi, che è vero quando

$$\forall x, x \in a \iff x \in b \ .$$

Questo è l'**assioma di estensionalità**. Questo dice che due insiemi a e b sono uguali quando hanno gli stessi elementi; cioè, esclude che un insieme possa avere qualche altra proprietà che lo contraddistingue. Per comodità viene usato il connettivo $a \subseteq b$, che è vero quando

$$\forall x, x \in a \Rightarrow x \in b \ .$$

Ovviamente $a = b \iff ((a \subseteq b) \wedge (b \subseteq a))$.

Viene inoltre definita la costante $\emptyset$ indicato anche come $\{\}$ che è l'insieme vuoto, [6] caratterizzato da

$$\forall x, \neg x \in \emptyset \ .$$

Si dimostra che l'insieme vuoto è unico.

Si introducono dunque alcune concetti fondamentali: unione, intersezione, differenza simmetrica, insieme potenza, prodotto cartesiano, relazioni, funzioni *etc.*

È uso indicare gli insiemi usando come variabili lettere Italiane maiuscole.

[6] Nella teoria assiomatica di Zermelo–Fraenkel l'esistenza di $\emptyset$ è un assioma.

Nota 1.18 *Si distingue fra una* teoria informale degli insiemi *e una* teoria formale degli insiemi.[7]

La teoria informale degli insiemi sfrutta tutte le nozioni precedentemente elencate, ma non indaga sui fondamenti, cioè sulle assiomatizzazione. Per questo approccio consigliamo il testo [2]; o [10] per una breve discussione.

La teoria formale degli insiemi *più usata è la teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel. Si veda il Cap. 6 in [3] (per una breve introduzione può andare bene anche [9]).*

Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo—Fraenkel tutte le variabili rappresentano insiemi, dunque le variabili non hanno un significato di verità o falsità. Per questo, nelle definizioni 1.2 e 1.6 di formula ben formata *si cambia il concetto di "atomo". Un atomo è ora una formula della forma $a \in b$ che ha valore di verità/falsità. Notate che nella teoria assiomatica, l'unica proposizione logica è "$a \in b$", a cui possiamo poi per comodità aggiungere proposizioni derivate, quali $a = b$, oppure $a \subseteq b$...*

Nota 1.19 *È di uso comune questa dicitura:* "sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi indicizzata da $i \in I$"*; questa, nella teoria assiomatica, andrebbe scritta come* "sia I un insieme non vuoto, sia X un insieme, sia $A : I \to \mathcal{P}(X)$, scriveremo A_i al posto di $A(i)$"*. (Con questa scrittura si ha che gli A_i sono tutti sottoinsiemi di X).*

E1.20 Dato A un insieme, e $P(x)$ una proposizione logica dipendente da una variabile libera x, usa scrivere "$\forall x \in A, P(x)$" oppure "$\exists x \in A, P(x)$" però

$$\forall x \in A, P(x) \text{ riassume } \forall x, (x \in A) \Rightarrow P(x) \ ,$$

$$\exists x \in A, P(x) \text{ riassume } \exists x, (x \in A) \wedge P(x) \ ;$$

laddove le versioni "estese" sono formule ben formate.

Usando questa scrittura estesa dimostrate che le due proposizioni

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \ , \ \exists x \in A, (\neg P(x)) \ .$$

sono equivalenti, nel senso che da una è possibile dimostrare l'altra (e viceversa). Nella dimostrazione usate solo le tautologie (elencate in E1.5) e in particolare l'equivalenza della formula "$P \Rightarrow Q$" con "$(\neg P) \vee Q$"[8], e infine l'equivalenza fra "$\neg\exists x, Q$" e "$\forall x, \neg Q$"[9].

Sostituendo poi $P(x)$ con $\neg P(x)$ e usando la tautologia della doppia negazione si ottiene poi che

$$\forall x \in A, (\neg P(x)) \ , \ \neg(\exists x \in A, P(x))$$

sono equivalenti.

E1.21 Siano D, C insiemi non vuoti. Una **funzione parziale** da D in C è una funzione $\varphi : B \to C$ dove $B \subseteq D$.

Può far comodo pensare alla funzione parziale come a una relazione $\Phi \in D \times C$ tale che, se $(x, a), (x, b) \in \Phi$ allora $a = b$. Le due nozioni sono equivalenti in questo senso: data Φ costruiamo il dominio di φ, che chiameremo B, con la proiezione di Φ sul primo fattore cioè $B = \{x, \exists c \in C, (x, c) \in \Phi\}$, e definiamo $\varphi(x) = c$ come l'unico elemento $c \in C$ tale che $(x, c) \in \Phi$; viceversa Φ è il grafico di φ.

Le funzioni parziali, viste come relazioni Φ, sono naturalmente ordinate per inclusione; equivalentemente $\varphi \le \psi$ se $\varphi : B \to C$ e $\psi : E \to C$ e $B \subseteq E \subseteq D$ e $\varphi = \psi_{|B}$.

Sia ora U una **catena**, cioè famiglia di funzioni parziali che è totalmente ordinata secondo l'ordinamento precedentemente dato; vedendo ogni funzione parziale come relazione, sia Ψ l'unione di tutte le relazioni in U; mostrate che Ψ è il grafico di una funzione parziale $\psi : E \to C$, il cui dominio E è l'unione di tutti i domini delle funzioni in U, e la cui immagine I è l'unione di tutte le immagini delle funzioni in U

Se inoltre tutte le funzioni in U sono iniettive, mostrate che ψ è iniettiva.

E1.22 L'**assioma di buona fondazione** (detto anche **assioma di regolarità**) della teoria di Zermelo–Fraenkel dice che ogni insieme non vuoto X contiene un elemento y che è disgiunto da X; in formula

$$\forall X, X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \, (y \in X) \wedge (X \cap y = \emptyset))$$

(ricordiamo che ogni oggetto nella teoria è un insieme, dunque y è un insieme).

Usando questo assioma provate questi fatti.

---

[7] Si veda l'introduzione al Cap. 6 in [3] per una discussione che confronta questi due approcci.

[8] Tautologia in eqn. (1.1).

[9] Già discussa in eqn.(1.6).

- Non esiste un insieme x che sia elemento di se stesso cioè per cui $x \in x$.
- Più in generale non esiste una famiglia finita $x_1, \dots x_n$ per cui $x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1$.
- Inoltre non esiste una successione $x_1, \dots x_n, \dots$ di insiemi per cui $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \dots$.

E1.23 `Prerequisiti:` E1.22. Mostrate che per ogni x esiste un y tale che $y \notin x$

E1.24 Mostrate invece che l'**assioma dell'infinito**, e la conseguente costruzione dei numeri naturali vista in Sez. 1.8 degli appunti, comporta che esiste una successione $x_1, \dots x_n, \dots$ di insiemi per cui $x_1 \in x_2 \in x_3 \dots$.

E1.25 Dato A insieme non vuoto mostrate che esiste una bigezione $f : A \to B$ fra A e un insieme B disgiunto da A.

Più in generale sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da $i \in I$;[10] mostrare che esistono bigezioni $f_i : A_i \to B_i$, dove gli insiemi B_i godono della proprietà $\forall i \in I, \forall j \in I, B_i \cap A_j = \emptyset$ e se $j \neq j$ anche $B_i \cap B_j = \emptyset$.

E1.26 L'**assioma dell'insieme potenza** dice che per ogni insieme x, esiste un insieme $\mathcal{P}(x)$ i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di x. Una formula abbreviata di definizione è

$$\mathcal{P}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y : \ y \subseteq x\},$$

ma nel linguaggio formale degli assiomi di Zermelo-Fraenkel, l'assioma si scrive:

$$\forall x, \exists\, \mathcal{P}(x), \forall y, y \in \mathcal{P}(x) \iff (\forall z, z \in y \implies z \in x)$$

(questa formula implica che l'insieme potenza è unico). Mostrate che $x \subseteq y$ se e solo se $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(y)$.

E1.27 Usando la definizione di coppia (a, b) come $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ mostrate che, dati due insiemi x, y , per ogni $a \in x, b \in y$ si ha

$$(a, b) \in \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y) \ .$$

Usate questo fatto e l'assioma di separazione per giustificare assiomaticamente la definizione del prodotto cartesiano $x \times y$.

E1.28 L'**assioma dell'unione** dice che per ogni insieme A esiste un insieme B che contiene tutti gli elementi degli elementi di A; in simboli,

$$\forall A \exists B, \forall x, (x \in B \iff (\exists y, y \in A \wedge x \in y)) \ .$$

Si mostra che questo è unico; indichiamo questo insieme B con $\bigcup A$.

Notate che questa notazione differisce da quella usuale, che è $\bigcup_{i \in I} C_i$, dove I è una famiglia di indici e C_i sono insiemi. Come potete definire $\bigcup_{i \in I} C_i$ assiomaticamente? *(Sugg. rileggete la nota 1.19)*

E1.29 Mostrate che $A = \bigcup(\mathcal{P}(A))$.

1.3.1 Lemma Zorn, Assioma della Scelta, Teorema di Zermelo

Vi sono tre enunciati fondamentali nella teoria degli insiemi, il Lemma Zorn, l'Assioma della Scelta, e il Teorema di Zermelo. Si dimostra, all'interno dell'assiomatica di Zermelo–Fraenkel, che questi sono equivalenti. Vediamo alcuni esercizi.

E1.30 Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia $B \subseteq V$. Una **combinazione lineare finita** v di elementi di B è equivalentemente definita come

- $v = \sum_{i=1}^{n} \ell_i b_i$ dove $n = n(v) \in \mathbb{N}$, $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \dots, b_n$ sono elementi di B;
- $v = \sum_{b \in B} \lambda(b) b$ dove $\lambda : B \to \mathbb{R}$ ma inoltre $\lambda(b) \neq 0$ solo per un numero finito di $b \in B$.

[10] *Cf.* 1.19

Chiamiamo $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^B$ l'insieme delle funzioni che sono non nulle solo per un numero finito di argomenti; Λ è uno spazio vettoriale. Per questo la seconda definizione è meno intuitiva ma è più facile da maneggiare.

Diremo che B **genera** V se ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare finita di elementi di B.

Diremo che i vettori di B sono **linearmente indipendenti** se $0 = \sum_{b\in B} \lambda(b)b$ implica $\lambda \equiv 0$; o equivalentemente che, dati $n \geq 1$, $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$ tutti diversi, la relazione $\sum_{i=1}^n \ell_i b_i = 0$ implica $\forall i \leq n, \ell_i = 0$.

Diremo che B è una **base algebrica** (anche nota come **base di Hamel**) se valgono entrambe le proprietà.

Se B è una base allora la combinazione lineare che genera v è unica (cioè vi è un' unica funzione $\lambda \in \lambda$ per cui $v = \sum_{b\in B} \lambda(b)b$).

Mostrate che esiste sempre una *base algebrica*. Mostrate più in generale che per ogni $A \subseteq V$ famiglia di vettori linearmente indipendenti esiste una *base algebrica* B con $A \subseteq B$.

(La dimostrazione in generale necessita del Lemma di Zorn).

E1.31 `Prerequisiti: 1.19, E1.28, E1.25 .`

Sia I un insieme non vuoto di indici, sia A_i una famiglia di insiemi indicizzata da $i \in I$. Ricordiamo che, per definizione, il prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ è l'insieme delle funzioni $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tali che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$.

Mostrate che le seguenti sono formulazioni equivalenti dell'**assioma della scelta**.

- Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.
- Data una famiglia A_i come sopra, tale che gli insiemi sono non vuoti a due a due disgiunti, esiste un sottoinsieme B di $\bigcup_{i\in I} A_i$ tale che, per ogni $i \in I$, $B \cap A_i$ contenga un unico elemento.

Nota 1.32 *Attenzione! Supponiamo come sopra che gli insiemi A_i siano non vuoti. Questo si scrive formalmente come $\forall i \in I, \exists x \in A_i$. Intuitivamente questo ci porta a dire che l'elemento x dipende da i, e dunque che $x = x(i)$. Questo passo, per quanto intuitivo, è esattamente l'assioma della scelta.*

E1.33 `Difficoltà: ⋆.`

Consider the following quotient of the family of all integer valued sequences

$$\mathbb{X} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}/\sim$$

where we define $a \sim b$ iff $a_k = b_k$ definitively in k.

We define the ordering

$$a \preceq b \iff \exists n \text{ s.t. } \forall k \geq n, a_k \leq b_k$$

that is, $a \preceq b$ when $a_k \leq b_k$ definitively.

Let a^k be an increasing sequence of sequences, that is, $a^k \preceq a^{k+1}$; we readily see that it has an upper bound b, by defining

$$b_n = \sup_{h,k\leq n} a^k_h .$$

We can then apply the Zorn Lemma to assert in the ordered set $(\mathbb{X}, \preceq)$ there exist maximal elements.

Given a, b we define

$$a \vee b = (a_n \vee b_n)_n$$

then it is easily verified that $a \preceq a \vee b$.

We conclude that the ordered set $(\mathbb{X}, \preceq)$ has an unique maximum. This is though false, since for any sequence a the sequence $(a_n + 1)_n$ is larger than that.

What is the mistake in the above reasoning? What do you conclude about $(\mathbb{X}, \preceq)$?

1.4 Cardinalità

Per comodità useremo il simbolo $|A|$ per indicare la cardinalità dell' insieme A. Questo simbolo si usa come segue. Dati due insiemi A, B, scriveremo $|A| = |B|$ se gli insiemi sono **equipotenti**, cioè se esiste una funzione bigettiva fra A e B; scriveremo $|A| \le |B|$ se esiste una funzione iniettiva da A a B. Si mostra $|A| \le |B|$ soddisfa la proprietà antisimmetrica (segue dal Teorema di Cantor–Bernstein). Se assumiamo vero l'assioma della scelta allora per ogni coppia di insiemi si ha sempre $|A| \le |B|$ oppure $|B| \le |A|$.

Se ora fissiamo una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi di interesse, definiamo innanzitutto la relazione $A \sim B \iff |A| = |B|$, si mostra facilmente che questa è una relazione di equivalenza; dunque si ottiene che $|A| \le |B|$ è un ordinamento totale in $\mathcal{F}/\sim$.

Per definizione "*un insieme A è **finito** e ha cardinalità n*" se è vuoto e $n = 0$, oppure se $n \ge 1$ e A è equipotente all'insieme di numeri naturali $\{1, \dots n\}$ (per una scelta di $n \in \mathbb{N}$, ricordiamo che vi è al più un n per cui la precedente vale, per il Lemma 1.16 degli appunti). Per semplicità decidiamo che $\{1, \dots n\} = \emptyset$ se $n = 0$; dato che la mappa nulla $f : \emptyset \to \emptyset$ è una bigezione, questo ci permette di unificare i due casi della definizione.

Dunque quando l'insieme è finito, $|A|$ si identifica con il numero (naturale) dei suoi elementi. Se un insieme non è finito, allora è **infinito**.

Ricordiamo il Teorema 1.17 degli appunti, per comodità.

Teorema 1.34 *Se A è infinito, allora $|A| \ge |\mathbb{N}|$. In particolare, $|A| > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Un insieme A equipotente a $\mathbb{N}$ si dice **numerabile**; [11] un tale insieme è infinito (per il Teorema 1.34 sopra riportato).

1.4.1 Insiemi finiti

E1.35 Sia A un insieme finito, e $B \subseteq A$, mostrate che B è finito.

E1.36 Supponiamo di avere un numero finito $m \ge 1$ di insiemi $A_1, \dots, A_m$ tutti finiti. Mostrate che $\bigcup_{j=1}^m A_j$ è un insieme finito.

E1.37 Ricordiamo che A^B è l'insieme di tutte le funzioni $f : B \to A$. Se A, B sono insiemi finiti mostrate che $|A^B| = |A|^{|B|}$

1.4.2 Confronto

E1.38 $|A| \le |B|$ se e solo se esiste una funzione surgettiva $f : B \to A$. (L'implicazione "se" necessita dell'assioma della scelta).

E1.39 Mostrate che se $|A_1| \le |A_2|$ e $|B_1| \le |B_2|$ allora $|A_1 \times B_1| \le |A_2 \times B_2|$.

E1.40 Mostrate che se $|A_1| \le |A_2|$ e $|B_1| \le |B_2|$ allora $|A_1^{B_1}| \le |A_2^{B_2}|$

E1.41 Mostrate che $|(A^B)^C| = |A^{(B\times C)}|$.

E1.42 Sia I una famiglia di indici e B_i, A_i insiemi per $i \in I$ con $|A_i| \le |B_i|$; supponiamo che gli insiemi B_i siano a due a due disgiunti; si mostri allora che

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \le \left|\bigcup_{i\in I} B_i\right| .$$

(Secondo voi è possibile dimostrare questo risultato senza usare l'assioma della scelta, almeno nel caso in cui I è numerabile?)

E1.43 Sia C un insieme, I una famiglia di indici e siano B_i insiemi per $i \in I$; supponiamo che gli insiemi B_i siano a due a due disgiunti; sia $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} B_i$ per comodità; si mostri allora che

$$\forall i, |B_i| \le |C| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{B}| \le |I \times C| \tag{1.7}$$
$$\forall i, |B_i| \ge |C| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{B}| \ge |I \times C| \ . \tag{1.8}$$

[11] Attenzione, in Inglese il termine *countable* si usa per insiemi finiti o numerabili.

E1.44 Sia C un insieme, I una famiglia di indici e siano B_i insiemi per $i \in I$ con $|B_i| = |C|$; si mostri allora che

$$|\mathcal{B}| = |C^I|$$

dove $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} B_i$.

E1.45 Mostrate che le cardinalità sono sempre confrontabili, cioè che dati due insiemi A, B si ha sempre o $|A| \leq |B|$ o $|B| \leq |A|$. (Usate il lemma di Zorn e la costruzione spiegata nell'esercizio E1.21).

1.4.3 Cardinalità numerabile

Ricordiamo che un insieme è "numerabile" se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Se A è numerabile, esiste $a : \mathbb{N} \to A$ bigettiva; scrivendo a_n invece di $a(n)$, diremo dunque che $A = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$ è una **enumerazione**.

E1.46 Trovato un polinomio $p(x, y)$ che, visto come funzione $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sia bigettivo. Se ne ricava, iterando, che esiste un polinomio q_k in k variabili bigettivo $q_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{N}^k$ è numerabile.

E1.47 Mostrate che gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, sono numerabili

E1.48 `Prerequisiti: E1.42, E1.46.`
Siano $A_0, A_1 \ldots A_n \ldots$ insiemi al più numerabili, per $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ è al più numerabile.

Notate che B è numerabile se ad esempio vi è almeno un n per cui A_n è numerabile.

E1.49 Indichiamo con $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq A$ che sono insiemi finiti. Questo è detto colloquialmente *l'insieme delle parti finite*.
Si mostri che $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}(\mathbb{N})$ è numerabile.

Questo risultato vale in generale, si veda E1.68.

1.4.4 Cardinalità del continuo

Definizione 1.50 *Diremo che un insieme ha cardinalità del continuo se ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{R}$.

E1.51 Spiegate come potreste costruire esplicitamente una bigezione fra $[0, 1)$ e $[0, 1)^2$.

E1.52 Mostrate con costruzioni esplicite che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo.

$$[0, 1], \quad [0, 1), \quad (0, 1), \quad (0, \infty) \ .$$

E1.53 `Prerequisiti: E1.60, E1.41, E1.40.`
Mostrate che i seguenti insiemi hanno cardinalità del continuo.

$$\mathbb{R}^n, \quad \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ .$$

E1.54 `Prerequisiti: E1.42,E1.53.` Siano A_t insiemi con cardinalità minore o uguale al continuo, per $t \in \mathbb{R}$. Si mostri che $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$ ha cardinalità del continuo.

E1.55 Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{R}$ che sono insiemi finiti o numerabili; si mostri che $\mathcal{A}$ ha cardinalità del continuo.

1.4.5 In generale

Aggiungiamo alcuni esercizi di carattere più generale.

E1.56 Mostrate che $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

E1.57 Considerate l'insieme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; e il sottoinsieme $\mathcal{A}$ delle f che possono essere definite usando un algoritmo, scritto in un linguaggio di programmazione a piacere, supponendo inoltre che il computer che lo esegue abbia una memoria potenzialmente illimitata, tale che per ogni scelta $n \in \mathbb{N}$ in input l'algoritmo deve terminare e restituire $f(n)$. Confrontate le cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e di $\mathcal{A}$.

E1.58 Calcolate la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ debolmente descrescenti.

E1.59 `Prerequisiti: E1.125.`
Un insieme A è detto *Dedekind–infinito* se è in bigezione con una sua parte propria cioè se esiste $B \subset A, B \neq A$ e $h : A \to B$ bigezione. Mostrate che un insieme A è *Dedekind–infinito* se e solo se esiste una funzione iniettiva $g : \mathbb{N} \to A$. (Questo risultato non necessita dell'assioma della scelta).

E1.60 Se A è infinito e B è finito o numerabile mostrate che $|A| = |A \cup B|$ usando l'esistenza di una funzione $g : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

E1.61 `Prerequisiti: 1.34, E1.59.`
Mostrate che un insieme A è *Dedekind–infinito* se e solo se è infinito (secondo la definizione vista all'inizio del capitolo).

E1.62 `Prerequisiti: E1.21.`
Sia A infinito. Mostrate che A si partiziona in due insiemi A_1, A_2 che hanno la stessa cardinalità di A. *(Sugg. considerate sottoinsiemi di A su cui la proprietà vale, usate Zorn)*

E1.63 `Prerequisiti: E1.62 .Difficoltà: ⋆.`
Sia A infinito. Mostrate che $|D \times A| = |A|$ per ogni insieme D finito o numerabile.

E1.64 Siano A, B infiniti. Mostrate che $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$.

E1.65 Mostrate che se A è un insieme infinito, e si decompone nell'unione disgiunta di due insiemi A_1, A_2 con $|A_1| \le |A_2|$ allora $|A| = |A_2|$.

E1.66 `Prerequisiti: E1.21, E1.63.Difficoltà: ⋆⋆.`
Siano A, B infiniti. Mostrate che $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$. (Sugg. cominciate col mostrare che $|A^2| = |A|$).

Nota storica. La proposizione "$|A^2| = |A|$ *vale per ogni insieme infinito*" è equivalente all'assioma della scelta. Questo fu dimostrato da Tarski nel 1928 (comparve sulla rivista *Fundamenta Mathematicae*, volume 5; l'articolo è online e scaricabile e contiene altre sorprendenti equivalenze).

E1.67 Sia A infinito. Sia $n \in \mathbb{N}$. Mostrate che $|A^n| = |A|$.

E1.68 `Prerequisiti: E1.42, E1.67, E1.66.`
Sia A infinito. Si mostri che l'insieme delle parti finite $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}(A)$ ha la stessa cardinalità di A.

E1.69 `Prerequisiti: E1.44, E1.66.`
Sia X un insieme infinito, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X, siano $U = X/\sim$ le classi di equivalenza.

- Supponiamo che ogni classe sia finita, mostrate che $|U| = |X|$.
- Supponiamo che U sia infinito e ogni classe abbia cardinalità al più $|U|$, allora $|U| = |X|$.

E1.70 `Prerequisiti: E1.68, E1.69. Difficoltà: ⋆⋆.`
Sia V uno spazio vettoriale reale. Siano A, B due basi di Hamel (si veda E1.30). Si mostri che $|A| = |B|$. (Questo risultato è noto come "*Teorema della dimensione*")

1.5 Operazioni su insiemi

E1.71 Sia X un insieme non vuoto, e $A \subseteq X$. Indicheremo con $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ il complementare di A in X.

Definiamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{Z}$ come

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Si dimostri che

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A \ , \ \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \ , \ \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

E1.72 Consideriamo ora invece la funzione caratteristica definita come prima, ma considerata come $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{Z}_2$ cioè a valori nel gruppo delle classi resto $\mathbb{Z}_2$ (più correttamente indicato come $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

In questo caso le precedenti si possono scrivere come

$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A + 1 \ , \ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \ , \ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \ .$$

Ricordiamo la definizione della differenza simmetrica $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, si mostri che questa si scrive come

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \ .$$

Con queste regole di calcolo si mostri che

$$A\Delta B = B\Delta A \ , \ (A\Delta B)^c = A\Delta(B^c) = (A^c)\Delta B \ , \ A\Delta B = C \iff A = B\Delta C$$

$$(A\Delta B) \cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C) \ , \ A\cup(B\Delta C) = (A\cup B)\Delta(A^c \cap C)$$

E1.73 Siano A, B, C insiemi, allora

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \ ,$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \ .$$

Dunque l'operazione di prodotto cartesiano è distributiva sull'unione e la intersezione.

E1.74 Se A, B, C sono insiemi non vuoti e

$$(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times C)$$

allora $A = B = C$.

E1.75 Dati quattro insiemi X, Y, A, B con $A \subset X, B \subset Y$, scrivete

$$(X \times Y) \setminus (A \times B)$$

come unione di tre insiemi a due a due disgiunti.

E1.76 Vogliamo riscrivere le tautologie viste in E1.5 sotto forma di relazioni insiemistiche.

Sia X un insieme e siano $\alpha, \beta, \gamma \subseteq X$ sottoinsiemi. Sia $x \in X$. Se definiamo $A = (x \in \alpha)$, $B = (x \in \beta)$, $C = (x \in \gamma)$ nelle tautologie, potremo poi riscrivere la tautologia come una formula fra insiemi $\alpha, \beta, \gamma, X, \emptyset$, che usi i connettivi $=, \cap, \cup$ e il complementare.

Sorprendentemente, la riscrittura può essere effettuata algoritmicamente e in maniera puramente sintattica. Scegliete una tautologie vista in E1.5. Nel seguito φ, ψ indicano sottoparti della tautologia che sono formule ben formate.

- Sostituite $((\varphi) \Rightarrow (\psi))$ con $((\neg(\varphi)) \vee (\psi))$ (otterrete un'altra tautologia).
- Poi sostituite sintatticamente $\neg(\varphi)$ con $(\varphi)^c$, $\vee$ con $\cup$ e $\wedge$ con $\cap$; sostituite A con α, B con β, C con γ, V con X e F con $\emptyset$.
- Infine, se la formula contiene almeno un "$\iff$", trasformateli tutti in "$=$"; altrimenti aggiungete "$= X$" alla fine.

Verificate che questo "algoritmo" funziona davvero!

E1.77 Sia X un insieme. Siano I, J famiglie non vuote di indici, e per ogni $i \in I$ sia $J_i \subseteq J$ una famiglia non vuota di indici. Per ogni $i \in I, j \in I_j$ sia $A_{i,j} \subseteq X$. Si mostri che

$$\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in I_j} A_{i,j} = \bigcap_{\beta\in B} \bigcup_{i\in I} A_{i,\beta(i)}$$

dove $B = \prod_{i\in I} J_i$ e ricordiamo che ogni $\beta \in B$ è una funzione $\beta : I \to J$ per cui per ogni i si ha $\beta(i) \in J_i$.

1.5.1 Limsup e liminf di insiemi

Dati $A_1, A_2 \ldots$ insiemi , per $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$\limsup_n A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1.9}$$

$$\liminf_n A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1.10}$$

$$\tag{1.11}$$

Supponiamo che $A_n \subseteq X$ per ogni n. (Possiamo porre $X = \bigcup_n A_n$).

E1.78 Indicheremo con $A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ il complementare di A in X. Mostrate che $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n (A_n^c)$.

E1.79 Mostrate che

$$\limsup_n A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ frequentemente in } n\} \ , \tag{1.12}$$

$$\liminf_n A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ definitivamente in } n\} \ . \tag{1.13}$$

(“Frequentemente” e “definitivamente” sono discussi in Sez. 1.2).

E1.80 `Prerequisiti: E1.79, E1.17.`

Dati $A_1, A_2 \ldots$ e $B_1, B_2 \ldots$ e insiemi , per $n \in \mathbb{N}$, vi è una relazione (di uguaglianza o di contenimento) fra

$$(\liminf_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) \quad ? \quad \liminf_n (A_n \cap B_n) \tag{1.14}$$

$$(\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n) \quad ? \quad \liminf_n (A_n \cup B_n) \tag{1.15}$$

Se non si ha uguaglianza, mostrate un esempio. Usate poi E1.78 per stabilire simili regole per il $\limsup_n A_n$.

1.6 Ordinamenti

Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto e ordinato.

Dati $x, y \in X$ ricordiamo che $x < y$ significa $x \leq y \wedge x \neq y$.

Quando si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$ diremo che i due elementi sono *“comparabili”*. Viceversa se non si ha ne $x \leq y$ ne $y \leq x$ diremo che i due elementi sono *“incomparabili”*.

Un elemento $m \in X$ si dice **massimale** se non esiste alcun elemento $z \in X$ tale che $m < z$.

E1.81 Mostrate che per ogni due $x, y \in X$ si ha uno di questi casi mutualmente esclusivi

- $x = y$,
- $x < y$,
- $x > y$,
- x, y sono incomparabili.

E1.82 Mostrate che $m \in X$ è *massimale* se e solo se *“per ogni $z \in X$ si ha che $z \leq m$ oppure z, m sono incomparabili”*.

E1.83 Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto finito e ordinato allora ammette massimali e minimali.

E1.84 Si costruisca un ordinamento $\preceq$ su $\mathbb{N}$ con questa proprietà: per ogni $n \in \mathbb{N}$

- l’insieme $\{k \in \mathbb{N}, k \neq n, k \preceq n\}$ degli elementi che precedono n ha esattamente due massimali,
- l’insieme $\{k \in \mathbb{N}, k \neq n, n \preceq k\}$ degli elementi che seguono n ha esattamente due minimali.

E1.85 Sia $R \subseteq X \times X$ una relazione; presi $x, y \in X$ scriveremo xRy invece di $(x, y) \in R$. Supponiamo che R sia *riflessiva* cioè xRx per ogni x, e che sia *transitiva* cioè per ogni $x, y, z \in X$ si abbia $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

R non è necessariamente una relazione d'ordine, perché non abbiamo ipotizzato che sia *antisimmetrica*: possiamo però "costruire" una relazione d'ordine "identificando fra loro" gli elementi di X su cui R non è antisimmetrica. Vediamo la costruzione nel dettaglio.

(a) Sia ora $\sim$ la relazione data da
$$x \sim y \iff xRy \wedge yRx$$
si mostri che è una relazione di equivalenza.

(b) Si consideri il quoziente $Y = X/\sim$, vogliamo mostrare come R passa al quoziente e produce una relazione T su Y. Si mostri che se $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in X$ e si ha $x \sim \tilde{x}, y \sim \tilde{y}$ allora $xRy \iff \tilde{x}R\tilde{y}$. Definiamo dunque T come l'insieme di tutte le coppie di classi di equivalenza i cui prodotti sono contenuti in R cioé $T = \{(z, w) \in Y^2 : z \times w \subseteq R\}$; questo si può scrivere anche come
$$zTw \iff (\forall x \in z, \forall y \in w, xRy)$$
abbreviamo questa definizione come $[x]T[y] \iff xRy$ (che è una buona definizione perché il membro destro non dipende dalla scelta dei rappresentanti nelle classi).

(c) Si mostri infine che T è una relazione d'ordine su Y.

E1.86 Sia X insieme non vuoto e $R \subseteq X^2$ una relazione d'ordine, allora esiste una relazione di ordine totale T che estende R (cioè $R \subseteq T$, considerando le relazioni come sottoinsiemi di X^2).

1.6.1 Ordinamento diretto e filtrante

Definizione 1.87 *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, diremo che è **filtrante** se*
$$\forall x, y \in X\, \exists z \in X,\ x < z, y < z \quad . \tag{1.16}$$

Gli insiemi $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ con i loro usuali ordinamenti sono filtranti.

Definizione 1.88 *Un **insieme diretto** è un insieme ordinato $(X, \leq)$ per cui*
$$\forall x, y \in X\, \exists z \in X,\ x \leq z, y \leq z \quad . \tag{1.17}$$

Ovviamente un ordinamento filtrante è anche diretto.

(Purtroppo in Inglese un insieme diretto si chiama alla volte *filtered set*).

E1.89 Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato filtrante, si mostri che è un insieme infinito.

E1.90 Sia $(X, \leq)$ un insieme diretto: si mostri che se esiste un elemento massimale in X allora è il massimo.

E1.91 Sia $(X, \leq)$ un insieme diretto, si mostri che sono equivalenti queste proprietà:

- $(X, \leq)$ soddisfa la *proprietà filtrante* (1.16),
- $(X, \leq)$ non ha massimo,
- $(X, \leq)$ non ha massimali.

Definizione 1.92 *Dato un insieme diretto $(X, \leq)$ un suo sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice **cofinale** se*
$$\forall x \in X\, \exists y \in Y,\ y \geq x \tag{1.18}$$

E1.93 Sia $(X, \leq)$ un insieme diretto, sia $Y \subseteq X$ cofinale: si mostri che $(Y, \leq_{|Y})$ è un insieme diretto.

Un insieme diretto $(X, \leq)$ è un ambiente a cui si può facilmente generalizzare la nozione già vista in 1.13.

Definizione 1.94 (frequentemente, definitivamente) *Sia* P(x) *una proposizione logica che dipende da una variabile libera $x \in X$. Diremo che*

P(x) *vale definitivamente per* $x \in X$ *se*	$\exists y \in X, \forall x \in X, x \geq y$ *vale* P(x) *;*
P(x) *vale frequentemente per* $x \in X$ *se*	$\forall y \in X, \exists x \in X, \geq y$ *per cui* P(x) *.*

Si verifichi per esercizio che le proprietà E1.14, E1.15 e E1.17 viste in Sez. 1.2 valgono anche in questo caso più generale. La proprietà E1.16 si riformula in questo modo

E1.95 Mostrate che $\boxed{\text{P(x) vale frequentemente in } x}$ se e solo se l'insieme

$$Y = \{x \in X : P(x)\}$$

è cofinale in X.

1.6.2 Ordinamento lessicografico

Definizione 1.96 *Dati due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$, posto $Z = X \times Y$,* ***l'ordinamento lessicografico*** *$\leq_Z$ su Z è dato da*

- *Nel caso $x_1 \neq x_2$, allora $(x_1, y_1) \leq_Z (x_2, y_2)$ se e solo se $x_1 \leq_X x_2$;*
- *$(x, y_1) \leq_Z (x, y_2)$ se e solo se $y_1 \leq_Y y_2$.*

Questo si estende al prodotto di più insiemi: dati due vettori, si considerano i primi elementi, se sono diversi si usa il primo ordinamento, se sono uguali si passa ai secondi elementi, *etc.*

E1.97 Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono ordinamenti totali, si mostri che $(Z, \leq_Z)$ è un ordinamento totale.

E1.98 Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ sono buoni ordinamenti, si mostri che $(Z, \leq_Z)$ è un buon ordinamento.

E1.99 Sia $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si costruisca una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente crescente.

E1.100 $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ ordinato con l'ordinamento lessicografico. Si mostri che non esiste una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ strettamente crescente.

1.6.3 Ordinamento totale, intervalli

Sia $\leq$ un ordinamento totale su X insieme non vuoto.

Definizione 1.101 *Un insieme $I \subseteq X$ è un* ***intervallo*** *se per ogni $x, z \in I$ e ogni $y \in X$ con $x < y < z$ si ha $y \in X$.*

Notate che l'insieme vuoto è un intervallo.

Definizione 1.102 *Dati $x, z \in X$ si definiscono i seguenti intervalli standard*

$$\begin{aligned}
(x, z) &= \{y \in X : x < y < z\} \\
(x, z] &= \{y \in X : x < y \leq z\} \\
(x, \infty) &= \{y \in X : x < y\} \\
[x, z) &= \{y \in X : x \leq y < z\} \\
[x, z] &= \{y \in X : x \leq y \leq z\} \\
[x, \infty) &= \{y \in X : x \leq y\} \\
(-\infty, z) &= \{y \in X : y < z\} \\
(-\infty, z] &= \{y \in X : y \leq z\} \\
(-\infty, \infty) &= X \ .
\end{aligned}$$

Notate che vi sono 9 casi, combinazioni di tre per l'estremo destro e tre per l'estremo sinistro. Intendiamo che $\infty, -\infty$ sono simboli e non elementi di X; per questo motivo se X ha massimo m, allora gli intervalli si scrivono preferibilmente come $(x, \infty) = (x, m]$ e $[x, \infty) = [x, m]$; similmente se ha un minimo.

E1.103 Prerequisiti: 1.101,1.102.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli. (Proposto il 22 Mar ◊)

Mostrate che la intersezione $\bigcap \mathcal{F}$ di tutti gli intervalli è un intervallo.

Supponiamo che l'intersezione $\bigcap \mathcal{F}$ sia non vuota, mostrate che la unione $\bigcup \mathcal{F}$ è un intervallo.

E1.104 Prerequisiti: 1.101,1.102.
Si trovi un esempio di insieme X con ordinamento totale, in cui vi è un intervallo I che non ricade in nessuna delle categorie viste in 1.102.

E1.105 Prerequisiti: 1.101,1.102,E1.103.
Sia $A \subseteq X$ un insieme non vuoto; sia I il più piccolo intervallo che contiene A; questo è definito come l'intersezione di tutti gli intervalli che contengono A (e l'intersezione è un intervallo, per E1.103). Sia M_A la famiglia dei maggioranti di A, M_I di I; si mostri che $M_A = M_I$. In particolare A è superiormente limitato se e solo I è superiormente limitato; se inoltre A ha estremo superiore, si avrà $\sup A = \sup I$. (Similmente per minoranti e estremi inferiori). (Proposto il 22 Mar ◊)

E1.106 Prerequisiti: 1.101,1.102,E1.103,E1.105.
Sia X un insieme totalmente ordinato. Mostrate che le due seguenti sono equivalenti.

- Ogni $A \subseteq X$ non vuoto limitato dall'alto e dal basso ammette estremo superiore e inferiore.
- Ogni intervallo $I \subseteq X$ non vuoto ricade in una delle categorie viste in 1.102.

1.6.4 Buoni ordinamenti

Definizione 1.107 *Un ordinamento totale $\le$ su un insieme X è un **buon ordinamento** se ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un minimo.*

In particolare X ha un minimo che indicheremo con 0_X.

Nota 1.108 *Ricordiamo che l'estremo superiore $\sup A$ di $A \subseteq X$ è per definizione il minimo dei maggioranti.*

Se X è bene ordinato si ha esistenza dell'estremo superiore $\sup A$ per ogni $A \subseteq X$ che sia superiormente limitato. [12] *(Se A non è superiormente limitato possiamo convenzionalmente decidere che $\sup A = \infty$).*

Definizione 1.109 *Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq X$ è un **segmento iniziale** se $\forall x \in S, \forall y \in X,\ y < x \Rightarrow y \in S$.*

Definizione 1.110 *Dati due insiemi non vuoti bene ordinati $(X, \le_X)$ e $(Y, \le_Y)$, diremo che* "hanno lo stesso tipo d'ordine"*, o più brevemente che sono* "equiordinati" [13]*, se esiste una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $f : X \to Y$.*

Notate che se $(X, \le_X)$ e $(Y, \le_Y)$ sono *equiordinati* allora X e Y sono *equipotenti*; però dato un insieme infinito X, esistono su di esso buoni ordinamenti di diverso tipo. (Si veda ad esempio l'esercizio E1.121)

La teoria dei buoni ordinamenti è molto legata alla teoria degli ordinali, che qui non tratteremo. Ci limitiamo a dire che ogni ordinale è il rappresentante standard di un tipo di buon ordinamento. Usando la teoria standard degli ordinali (dovuta a Von Neumann) molti degli esercizi successivi si possono riformulare e semplificare.

E1.111 Sia X totalmente ordinato. Mostrate che sono equivalenti

(a) X è bene ordinato;

(b) non esistono funzioni $f : \mathbb{N} \to X$ strettamente decrescenti.

E1.112 Mostrate che l'unione di segmenti iniziali è un segmento iniziale.

E1.113 Se $S \subseteq X$ è un segmento iniziale e $S \ne X$, mostrate che esiste ed è unico $s \in X \setminus S$ (detto *l'elemento successivo* a S) che estende S, tale cioè che $S \cup \{s\}$ è un segmento iniziale.

[12] "Superiormente limitato" vuol dire che esiste $w \in X$ tale che $x \le w$ per ogni $x \in A$. Ciò equivale a dire che l'insiemi dei maggioranti di A è non vuoto!

[13] La dicitura "equiordinati" non è standard.

E1.114 `Prerequisiti:` 1.101, 1.102, E1.106.
Sia X un insieme bene ordinato. Mostrate che se $I \subseteq X$ è un intervallo allora $I = [a, b)$ oppure $I = [a, b]$ oppure $I = [a, \infty)$ con $a, b \in X$. (Il viceversa è ovviamente vero).

In particolare un segmento iniziale è $[0_X, a)$ o $[0_X, a]$ oppure tutto X.

E1.115 Siano $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ insiemi non vuoti totalmente ordinati. Sia $f : X \to Y$ una funzione bigettiva strettamente crescente. Allora per ogni $S \subseteq X$ segmento iniziale si ha che $f(S)$ è un segmento iniziale di Y; e viceversa.

E1.116 `Prerequisiti:` E1.111. Sia $(X, \leq_X)$ un insieme non vuoto bene ordinato. Mostrate che se $S \subseteq X$ è un segmento iniziale e $(X, \leq_X)$ e $(S, \leq_X)$ sono equiordinati dalla mappa $f : S \to X$ allora $X = S$ e f è l'identità.

(Notate la differenza con la teoria delle cardinalità: un insieme infinito è in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, *cf* E1.59 e E1.61; inoltre se due insiemi hanno la stessa cardinalità allora vi sono molte bigezioni fra essi.)

E1.117 Date un esempio di un insieme totalmente ordinato $(X, \leq_X)$ che ha minimo, e di un segmento iniziale S tali che $(X, \leq_X)$ e $(S, \leq_X)$ sono equiordinati.

E1.118 `Prerequisiti:` E1.116.
Siano $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ bene ordinati; supponiamo che esista $f : X \to T$ funzione bigettiva monotona strettamente crescente, dove T un segmento iniziale di Y; allora f è unica (e unico è T).

E1.119 `Prerequisiti:` E1.21, E1.112, E1.115, E1.113, E1.118. Siano dati due insiemi non vuoti bene ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$. Mostrate che

(a) esiste un segmento iniziale S di X e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $g : S \to Y$; oppure [14]

(b) esiste un segmento iniziale T di Y e una funzione bigettiva monotona strettamente crescente $g : X \to T$.

Nel primo caso scriveremo che $(Y, \leq_Y) \preceq (X, \leq_X)$, nel secondo che $(X, \leq_X) \preceq (Y, \leq_Y)$. (Notate che nel primo caso si ha $|Y| \leq |X|$ e nel secondo $|X| \leq |Y|$). Per l'esercizio precedente la mappa g e il relativo segmento sono uniche.

E1.120 Mostrate che se $(X, \leq_X) \preceq (Y, \leq_Y)$ e anche $(Y, \leq_Y) \preceq (X, \leq_X)$, allora sono *equiordinati*.

La relazione $\preceq$ è dunque una relazione di ordine totale fra tipi di buoni ordinamenti.

E1.121 `Prerequisiti:` E1.98.
Il tipo di buon ordinamento di $\mathbb{N}$ è chiamato ω. Dato $k \geq 2$ naturale, il prodotto di $\mathbb{N}^k$ con l'ordinamento lessicografico è un insieme bene ordinato (per E1.98), e il suo tipo di buon ordinamento è chiamato ω^k.

Mostrate che $\omega^k \preceq \omega^h$ per $h > k$.

E1.122 Costruite un buon ordinamento su un insieme numerabile X tale che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ dove S_n sono segmenti iniziali, ciascuno con tipo di ordinamento ω^n. L'ordinamento così costruito su X si indica con ω^ω.

1.7 Funzioni

E1.123 Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \to J$ data $f(x) = \sin(x)$. Scegliendo $I = \mathbb{R}$ o $I = [0, \pi/2]$ oppure $I = [-\pi/2, \pi/2]$, e scegliendo $J = \mathbb{R}$ o $J = [-1, 1]$, dite per quali scelte f è surgettiva, e per quali è iniettiva.

(Questo esercizio serve a farvi riflettere sulla differenza fra "formula" e "funzione".)

E1.125 Sia A un insieme non vuoto; sia $a \in A$ fissato, siano date funzioni $g_n : A \to A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrate che esiste ed è unica la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ tale che

[14] Le due condizioni possono anche valere entrambe, nel qual caso X, Y hanno lo stesso tipo di ordine.

- $f(0) = a$, e
- per ogni $n \geq 0$ si ha $f(n+1) = g_n(f(n))$.

Si dice che la funzione f è **definita per ricorrenza** dalle due precedenti condizioni.

Più in generale date $g_n : A^{n+1} \times A$, mostrate che esiste ed è unica la funzione $f : \mathbb{N} \to A$ tale che $f(0) = a$ e per ogni $n \geq 0$ si ha $f(n+1) = g_n(f(0), f(1), \ldots f(n))$.

E1.126 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Siano I una famiglia nonvuota di indici, $B_i \subseteq C$ per $i \in I$. Dato $B \subseteq C$ ricordiamo che la **controimmagine** di B è

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D, f(x) \in B\} ,$$

Dato $B \subseteq C$ sia $B^c = \{x \in C, x \notin B\}$ il complementare. Mostrate queste proprietà della controimmagine.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \\ f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) &= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \\ f^{-1}(B^c) &= f^{-1}(B)^c . \end{aligned}$$

E1.127 Siano D, C insiemi non vuoti e $f : D \to C$ una funzione. Siano I una famiglia nonvuota di indici, $A_i \subseteq D$, per $i \in I$. Dato $A \subseteq D$ ricordiamo che la **immagine** di A è il sottoinsieme $f(A)$ di D dato da

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x), x \in A\} .$$

Mostrate queste proprietà della immagine.

$$\begin{aligned} f(\bigcup_{i\in I} A_i) &= \bigcup_{i\in I} f(A_i) \\ f(\bigcap_{i\in I} A_i) &\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i) . \end{aligned}$$

Mostrate che la funzione è iniettiva se e solo se

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \qquad (1.19)$$

è un' uguaglianza per ogni scelta di $A_1, A_2 \subseteq D$.

E1.128 Sia A un insieme e sia $g : A \to A$ iniettiva. Definiamo la relazione $x \sim y$ che è vera quando si ha un $n \geq 0$ per cui $x = g^n(y)$ oppure $x = g^n(y)$; dove

$$g^n = \overbrace{g \circ \cdots \circ g}^{n}$$

è la n-esima iterata della composizione. (Decidiamo che g^0 è la identità). Mostrate che $x \sim y$ è una relazione di equivalenza. Studiate le classi di equivalenza. Sia $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} g^n(A)$ l'intersezione delle immagini ripetute. Mostrate che ogni classe è interamente contenuta in U o ne è esterna.

E1.129 Mostrate che esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(f(x)) = -x$. Esiste una funzione continua per cui $f(f(x)) = -x$? (Sugg. mostrate che per ogni tale f si ha $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$).

E1.130 Mostrate che esiste una funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tale che $f(f(x)) = \sin(x)$. Esiste una funzione continua?

1.8 Funzioni elementari

E1.131 Siano n, m, k interi positivi. Si dimostri che il numero $(n + \sqrt{m})^k + (n - \sqrt{m})^k$ è intero.

E1.132 Sia K un intero positivo, N un intero, sia $I = \{N, N+1, \ldots, N+K\}$ la successione degli interi da N a $N+K$. Per ogni $n \in I$ fissiamo un valori intero a_n. Sia p l'unico polinomio di grado K tale che $p(n) = a_n$ per ogni $n \in I$.

- Si mostri che p ha coefficienti razionali.
- Si mostri che $p(x)$ è intero per ogni x intero.
- Si trovi un esempio di polinomio p che assume valori interi per x intero ma che non ha tutti coefficienti interi.
- Cosa succede se I contiene $K+1$ interi ma non consecutivi? È ancora vero che, definito $p(n)$ come sopra, p assume solo valori interi?

E1.133 Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n, si mostri che esiste $c > 0$ tale che per ogni x si abbia $|p(x)| \le c(1 + |x|^n)$.

1.9 Combinatoria

E1.134 Siano dati n, k naturali con $k \ge 1$. Quante diverse scelte di vettori $(j_1, \ldots j_k)$ di numeri naturali vi sono per cui $j_1 + \cdots + j_k = n$? Quante diverse scelte di vettori $(j_1, \ldots j_k)$ di numeri naturali positivi vi sono per cui $j_1 + \cdots + j_k = n$?

E1.135 Siano n, m interi positivi e siano $I = \{1, \ldots, n\}, J = \{1, \ldots m\}$.

- Quante sono le funzioni $f : I \to J$?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ iniettive?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ strettamente crescenti?
- Quante sono le funzioni $f : I \to J$ debolmente crescenti?

Si veda anche l'esercizio E1.37.

1.10 Esempi standard

1.10.1 Insieme di Cantor

Sia nel seguito $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme ternario di Cantor. Non riportiamo qui la costruzione (che si trova su innumerevoli testi, ad esempio in Sez. 2.44 in [6]; e anche su Wikipedia).

E1.136 Mostrate che C è composto solo di punti di accumulazione.

E1.137 Sia $I = \{0, 2\}$ e $X = I^{\mathbb{N}}$, Si consideri la mappa $F : X \to C$ data da

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1} x_n .$$

Si mostri che è una bigezione.

Dotiamo ora X dell' ordine lessicografico, e poi della topologia d'ordine, si mostri che F è un omeomorfismo.

Si vedano anche E5.96, E5.149 e E5.117.

2 Retta reale

Indicheremo nel seguito con $\mathbb{R}$ la retta reale, e con $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la sua estensione.

Useremo gli *intervalli* (si veda la definizione in 1.101).

E2.1 `Prerequisiti: E1.106.`
Si mostri che ogni intervallo I in $\mathbb{R}$ ricade in una delle categorie precedentemente viste in 1.102.

2.1 Intorni

Gli intorni sono una famiglia di insiemi associata a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure a $x_0 = \pm\infty$. Gli intorni sono insiemi che contengono un insieme "esempio". Vediamo qui alcune definizioni.

Definizione 2.2 (Intorni) *Gli intorni "bucati" di punti $x_0 \in \mathbb{R}$ si dividono in tre classi.*

- *Intorni di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ per un $\delta > 0$;*
- *intorni destri di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0, x_0 + \delta)$ per un $\delta > 0$;*
- *intorni sinistri di $x_0 \in \mathbb{R}$, che contengono un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$ per un $\delta > 0$;*

in ogni caso gli intorni "bucati" non devono contenere il punto x_0. Gli intorni "pieni" si ottengono aggiungendo x_0. Gli "intorni pieni" sono la base per la topologia standard su $\mathbb{R}$.

Ai precedenti aggiungiamo poi gli intorni di $\pm\infty$:

- *intorni di ∞ , che contengono un insieme del tipo (y, ∞) al variare di $y \in \mathbb{R}$;*
- *intorni di $-\infty$, che contengono un insieme del tipo $(-\infty, y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$;*

in questo caso non distinguiamo intorni "bucati" e intorni "pieni".

2.2 Frequentemente, definitivamente

Definizione 2.3 (frequentemente, definitivamente) *Sia $x \in \mathbb{R}$; sia* P(x) *una proposizione. Definiamo che*

"P(x) *vale definitivamente per x tendente a x_0" se*	*esiste un intorno U di x_0 $\forall x \in U$, vale* P(x) ;
"P(x) *vale frequentemente per x tendente a x_0" se*	*per ogni intorno U di x_0 $\exists x \in U$, vale* P(x) ;

dove si intende che gli intorni sono "bucati".

Nota 2.4 *Come già visto in E1.15, anche in questo caso le due seguenti proposizioni sono equivalenti.*

- *"non $\Big(P(x)$ vale definitivamente per x tendente a $x_0 \Big)$",*
- *" $($ non $P(x)$ $)$ vale frequentemente per x tendente a x_0".*

Mettendo insieme le idee precedenti,

- se $x_0 \in \mathbb{R}$,

$\exists\delta > 0, \forall x \neq x_0, \lvert x - x_0\rvert < \delta \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a x_0
$\forall\delta > 0, \exists x \neq x_0, \lvert x - x_0\rvert < \delta \wedge P(x)$	$P(x)$ vale frequentemente per x tendente a x_0

- nel caso in cui $x_0 = \infty$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x > y \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a ∞
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x > y \wedge P(x)$	$P(x)$ vale frequentemente per x tendente a ∞

- e similmente $x_0 = -\infty$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x, x < y \Rightarrow P(x)$	$P(x)$ vale definitivamente per x tendente a $-\infty$
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x, x < y \wedge P(x)$	$P(x)$ vale frequentemente per x tendente a $-\infty$

2.3 Estremi superiori e inferiori

Rivediamo preliminarmente le caratterizzazioni degli estremi superiori e inferiori in $\mathbb{R}$. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Ricordiamo che (Cap 1 Sez 5 negli appunti) *l'estremo superiore* di un insieme A è il minimo dei maggioranti; lo indicheremo con la usuale scrittura $\sup A$; se A è superiormente limitato allora $\sup A$ è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone $\sup A = +\infty$.

Sia dunque $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; si possono facilmente dimostrare le seguenti proprietà:

$\sup A \le l$	$\forall x \in A, x \le l$
$\sup A > l$	$\exists x \in A, x > l$
$\sup A < l$	$\exists h < l, \forall x \in A, x \le h$
$\sup A \ge l$	$\forall h < l, \exists x \in A, x > h$

la prima e la terza derivano dalla definizione di *estremo superiore*, [15] la seconda e la quarta per negazione; nella terza si può concludere equivalentemente che $x < h$, e nella quarta che $x \ge h$.

Se $l \ne +\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l - \varepsilon$)

$\sup A < l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \le l - \varepsilon$
$\sup A \ge l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > l - \varepsilon$

Similmente *l'estremo inferiore* di un insieme A è il massimo dei minoranti; lo indicheremo con la usuale scrittura $\inf A$; se A è inferiormente limitato allora $\inf A$ è un numero reale; in caso contrario, per convenzione, si pone $\inf A = -\infty$.

Sia dunque $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; valgono le seguenti proprietà:

$\inf A \ge l$	$\forall x \in A, x \ge l$
$\inf A < l$	$\exists x \in A, x < l$
$\inf A > l$	$\exists h > l, \forall x \in A, x \ge h$
$\inf A \le l$	$\forall h > l, \exists x \in A, x < h$

Se $l \ne -\infty$ allora usa anche scrivere (sostituendo $h = l + \varepsilon$)

$\inf A > l$	$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \ge l + \varepsilon$
$\inf A \le l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \le l + \varepsilon$

Nota 2.5 *Si noti che se si sostituisce A con $-A$, e $l \mapsto -l$, si passa dalle definizioni del* $\sup$ *a quelle del* $\inf$ *(e viceversa).*

2.3.1 Esercizi

Siano I, J generici insiemi non vuoti. Si vedano le definizioni in Sez. 2.3

E2.6 Sia a_n una successione a valori reali, per $n \in I$ un insieme di indici; siano $r > 0, t \in \mathbb{R}, \rho < 0$; mostrate che

$$\sup_{n\in I}(a_n + t) = t + \sup_{n\in I} a_n \ , \quad \sup_{n\in I}(r a_n) = r \sup_{n\in I} a_n \ , \quad \sup_{n\in I}(\rho a_n) = \rho \inf_{n\in I} a_n \ .$$

E2.7 Sia $a_{n,m}$ una successione reali a due indici $n \in I, m \in J$, mostrate che

$$\sup_{n\in I, m\in J} a_{n,m} = \sup_{n\in I}\left(\sup_{m\in J} a_{n,m}\right) \ .$$

E2.8 `Prerequisiti:` `E2.7,E2.6`. Siano a_n, b_n successioni reali, per $n \in I$, mostrate che

$$\sup_{n,m\in I}(a_n + b_m) = (\sup_{n\in I} a_n) + (\sup_{n\in I} b_n) \ ,$$

ma

$$\sup_{n\in I}(a_n + b_n) \le (\sup_{n\in I} a_n) + (\sup_{n\in I} b_n) \ ;$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta.

E2.9 `Prerequisiti:` `E2.7`. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e sia

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

[15] In particolare nella terza si può pensare che $h = \sup A$.

la *somma di Minkowski* [16] dei due insiemi: mostrate che

$$\sup(A \oplus B) = (\sup A) + (\sup B) \ .$$

E2.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Siano $I_n \subseteq \mathbb{R}$ (per $n \in \mathbb{N}$) intervalli non vuoti chiusi e limitati, tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$: si mostri che $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ è non vuoto. *(Svolto il 8 mar ◊)*

Se assumiamo che $I_n \subseteq \mathbb{Q}$, il risultato vale lo stesso?

Questo risultato è noto come "teorema dell'intersezione di Cantor". Si estende a contesti più generali, si vedano E5.89 e E4.37.

2.4 Limiti

Scriveremo $\overline{\mathbb{R}}$ per $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definizione 2.11 (punto di accumulazione) *Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice* punto di accumulazione *per A se ogni intorno "bucato" di x interseca A.*

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

L'idea di limite (destro o sinistro o bilaterale) è così espressa.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	per ogni intorno V "pieno" di l, esiste intorno U "bucato" di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap I$, si ha $f(x) \in V$

dove l'intorno U sarà destro o sinistro se il limite è destro o sinistro; si può anche dire che

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	per ogni intorno V "pieno" di l, si ha $f(x) \in V$ definitivamente per x tendente a x_0

aggiungendo che $x > x_0$ se il limite è destro, oppure $x < x_0$ se il limite è sinistro. Scriviamo ora esplicitamente queste idee.

Sia I un insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per I, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione, $l \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2.12 *Mettendo insieme tutte le definizioni viste precedentemente, otteniamo queste definizioni di limite. Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$:*

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \neq x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Sia $l \in \mathbb{R}$, $x_0 = \pm\infty$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow \lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Nota 2.13 *Si noti che se si sostituisce $f \mapsto -f$, si passa dalle definizioni con $l = \infty$ a quelle del $l = -\infty$ (e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando $x_0 \to -x_0$ e gli intorni destri e sinistri.*

[16] La *somma di Minkowski* ritornerà nella sezione 6.5.

2.5 Limiti superiori e inferiori

Dalla precedente definizione passiamo alle definizioni di $\limsup$ e $\liminf$. L'idea è così espressa.

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{U \text{ intorno di } x_0} \sup_{x\in U} f(x) \qquad \liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{U \text{ intorno di } x_0} \inf_{x\in U} f(x) \tag{2.1}$$

dove il primo "inf" (risp. il "sup") si esegue rispetto alla famiglia di tutti gli intorni U di x_0 (sempre del tipo "col buco"); e gli intorni saranno destri o sinistri se il limite è destro o sinistro. Usando le proprietà di $\inf, \sup$, otteniamo ad esempio queste caratterizzazioni

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le l \iff \forall z > l, \text{ definitivamente per } x \to x_0, f(x) < z \;;$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \ge l \iff \forall z < l, \text{ frequentemente per } x \to x_0, f(x) > z \;;$$

e così via. Le esplicitiamo ulteriormente in quanto segue. (Si raccomanda di provare a riscrivere autonomamente alcune voci, a titolo di esercizio).

Definizione 2.14 *Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, dividiamo la definizione in due condizioni:*

$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$

$\liminf_{x\to x_0} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon$

Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = \pm\infty$:

$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists\delta > 0, \forall x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x \ne x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x > x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall\delta > 0, \exists x, \lvert x - x_0\rvert < \delta, x < x_0, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Nel caso $x_0 = \pm\infty$ e $l = \pm\infty$:

$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\limsup_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\forall z, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > z$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall z, \forall y, \exists x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < z$

Nel caso $x_0 = \pm\infty$ e $l \in \mathbb{R}$:

$\limsup_{x\to\infty} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$
$\limsup_{x\to\infty} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$
$\limsup_{x\to-\infty} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$
$\liminf_{x\to\infty} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x > y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) \le l$	$\forall\varepsilon > 0, \forall y, \exists x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) < l+\varepsilon$
$\liminf_{x\to-\infty} f(x) \ge l$	$\forall\varepsilon > 0, \exists y, \forall x, x < y, x \in I \Rightarrow f(x) > l-\varepsilon$

Nota 2.15 *Notate che*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

e

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Nota 2.16 *Si noti che se si sostituisce $f \mapsto -f$, $l \mapsto -l$, si passa dalle definizioni del $\limsup$ a quelle del $\liminf$ (e viceversa). Un'altra simmetria si ottiene scambiando $x_0 \to -x_0$ e gli intorni/limiti destri e sinistri.*

Esercizio 2.17 *Siano $A_1, A_2 \dots$ insiemi , per $n \in \mathbb{N}$; sia $X = \bigcup_n A_n$. Definiamo la funzione caratteristica $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ come*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Useremo le definizioni $\limsup_n A_n$ e $\liminf_n A_n$ viste in eqn. (1.9) *e* (1.10)*. Si ha*

$$\mathbb{1}_{(\limsup_n A_n)} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} \ , \tag{2.2}$$

$$\mathbb{1}_{(\liminf_n A_n)} = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n} \ . \tag{2.3}$$

Esercizio 2.18 *Fissiamo una successione a_n a valori reali; consideriamo ora la definizione di eqn.* (2.1)*, ponendo $I = \mathbb{N}$ e $x_0 = \infty$, in modo che gli intorni di x_0 siano gli insiemi del tipo $[n, \infty) = \{m \in \mathbb{N} : m \ge n\}$; con questi presupposti mostrate che si ha*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup_{m\ge n} a_n = \lim_n \sup_{m\ge n} a_n \ , \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup_n \inf_{m\ge n} a_n = \lim_n \inf_{m\ge n} a_n \ ., \tag{2.4}$$

Altri esercizi su limiti di successioni si trovano in Sez. 3.1.

2.6 Razionali, irrazionali, algebrici

Nei prossimi esercizi useremo le seguenti definizioni.

Definizione 2.19 *Per $x \in \mathbb{R}$ sia $\lfloor x \rfloor$ la parte intera inferiore di x definita da*

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{def}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$

allora $x - \lfloor x \rfloor$ è la parte frazionaria di x. (Posto $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$, notate che $\varphi(3,1415) = 0,1415$ ma $\varphi(-4,222) = 0,778$ perché $\lfloor -4,222 \rfloor = -5$).

E2.20 `Prerequisiti:` 2.19. Dati $x \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}, N \ge 2$, si dimostri che almeno un elemento dell'insieme $\{x, 2x, \dots, (N-1)x\}$ dista al massimo $1/N$ da un intero. *(Svolto il 30 nov)*

E2.21 `Prerequisiti:` 2.19,E2.20. Dati $x, b \in \mathbb{R}$ con $x \ne 0$ irrazionale, e $\varepsilon > 0$, si dimostri che esiste un M naturale tale che $Mx - b$ dista al massimo ε da un intero. *(Svolto il 30 nov)*

Sia $\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor$ la parte frazionaria di x, si ha $\varphi(x) \in [0, 1)$. Il risultato precedente implica che la successione $\varphi(nx)$ è densa nell'intervallo $[0, 1]$.

Notate che invece se $x \ne 0$ è razionale cioè $x = n/d$ con n, d interi primi tra loro e $d > 0$, allora la successione $\varphi(nx)$ assume tutti e soli i valori $\{0, 1/d, 2/d, \dots (d-1)/d\}$. (Questo si dimostra con il Lemma di Bézout).

E2.22 `Prerequisiti:` E2.20. *(Teorema di approssimazione di Dirichlet)* Dato un numero irrazionale x, si dimostri che esistono infiniti razionali α tali che si può rappresentare $\alpha = m/n$ in modo da soddisfare la relazione

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2} \quad .$$

Alcuni commenti.

- Si noti per ogni fissato $n \geq 2$ esiste al più un m per cui la precedente relazione vale; ma potrebbe non esisterne uno.
- Si noti che se la relazione vale per un α razionale, vi sono solo finite scelte di rappresentazioni per cui vale,
- e sicuramente vale per la scrittura "canonica" con n, m primi fra loro.

E2.23 Dati $k > 0$, $\varepsilon > 0$ e un numero razionale x, si dimostri che esistono solo finiti razionali α tali che si può rappresentare $\alpha = m/n$ in modo da soddisfare la relazione

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{k}{n^{1+\varepsilon}} \quad .$$

E2.24 Dimostrare che per ogni razionale m/n si ha

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| > \frac{1}{4n^2}.$$

Si ottiene che l'insieme $A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2} \right)$ è un aperto che contiene ogni numero razionale, ma $A \neq \mathbb{R}$.

2.7 Algebrici

Definizione 2.25 *Un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ è detto* algebrico *se esiste un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con coefficienti interi tale che $p(\alpha) = 0$. In caso contrario α è detto* trascendente.

Notiamo che ogni $\alpha = n/m$ razionale è algebrico, in quanto radice di $p(x) = mx - n$.

Definizione 2.26 *Dato un anello commutativo A, l'insieme dei polinomi $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con coefficienti $a_i \in A$ è usualmente denotato da $A[x]$; questo insieme, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto di polinomi, è un anello commutativo.*

Vogliamo mostrare che i numeri algebrici sono un campo.

E2.27 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, si costruisca un $q \in \mathbb{Z}[z]$ tale che $q(\alpha) = 0$.

Dunque la definizione di *algebrico* si può dare equivalentemente con i polinomi a coefficienti razionali.

E2.28 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(1/\alpha) = 0$.

Dunque se α è algebrico allora $1/\alpha$ è algebrico.

E2.29 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, dato $b \in \mathbb{Q}$ si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(b\alpha) = 0$.

Dunque se α è algebrico allora $b\alpha$ è algebrico.

E2.30 Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $p(\alpha) = 0$, dato $b \in \mathbb{Q}$ si costruisca un $q \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $q(\alpha + b) = 0$.

Dunque se α è algebrico allora $\alpha + b$ è algebrico.

E2.31 Difficoltà: $\star$.
Più in generale, dati $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $p \in \mathbb{Q}[z]$ $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, $q \in \mathbb{Q}[z]$, date α, β tali che $p(\alpha) = 0 = q(\beta)$, si costruisca un polinomio $r \in \mathbb{Q}[z]$ tale che $r(\alpha + \beta) = 0$.

(Sugg. si usi la teoria del risultante https://en.wikipedia.org/wiki/Resultant).

Dunque se α, β sono algebrici allora $\alpha + \beta$ è algebrico.

E2.32 Si mostri che se α è algebrico allora α^2 è algebrico.

E2.33 Se α, β algebrici si mostri che $\alpha\beta$ è algebrico.

Quanto sopra dimostra che i numeri algebrici sono un campo.

3 Successioni e serie

3.1 Successioni

E3.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con $a_n \sim n^n$. Si dimostri che, posto $s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_n$ si ha $s_n \sim a_n$.

E3.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano e_n, d_n due successioni reali tali che $d_n \le e_n$ per ogni n, e che $\limsup_n e_n = \liminf_n d_n = b$ (possibilmente infinito): mostrate allora che $\lim_n e_n = \lim_n d_n = b$.

E3.3 `Argomenti: . Prerequisiti: E2.8,2.18. Difficoltà: .`
Siano a_n, b_n successioni a valori reali, mostrate che

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le (\limsup_{n\to\infty} a_n) + (\limsup_{n\to\infty} b_n) \ ;$$

trovate un caso in cui la disuguaglianza è stretta.

E3.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $a_{n,m}$ una successione reale [17] a due indici $n, m \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

- per ogni m esista il $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$, e che
- esista finito il $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, cioè

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h \ge m\ |a_{n,h} - b_n| < \varepsilon \ .$$

allora

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{n,m} \tag{3.1}$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste (possibilmente infinito), allora esiste anche l'altro, e sono uguali.

Trovate un semplice esempio in cui i due limiti in (3.1) sono infiniti.

Trovate un esempio in cui $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ ma il limite non è uniforme e la precedente uguaglianza (3.1) non vale.

E3.5 `Argomenti: . Prerequisiti: E3.4,E3.2. Difficoltà: .`
Sia di nuovo $a_{n,m}$ una successione reale a due indici $n, m \in \mathbb{N}$; supponiamo che per ogni n esista finito il $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = b_n$ uniformemente in n, e che esista finito il $\lim_n b_n$. Si può concludere che esistono i limiti $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$ per ogni fissato m? Sapete scrivere un' uguaglianza come in eqn. (3.1) in cui però a destra si usino i limiti superiori o inferiori di $a_{n,m}$ per $n \to \infty$, al posto dei limiti $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}$?

E3.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Mostrate che da ogni successione $(a_n)_n$ si può estrarre una sottosuccessione monotona.

E3.7 `Argomenti: costante di Eulero-Mascheroni. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che esiste finito il limite *(Svolto il 20 Mar)*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right) \quad .$$

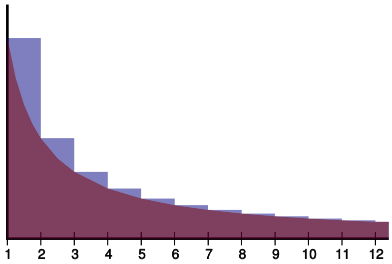
Questa γ è detta Costante di Eulero - Mascheroni Si può definire in moltissimi modi diversi (si veda il link precedente) fra cui

$$\gamma = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

dove le parentesi $\lfloor\cdot\rfloor$ indicano la funzione parte intera $\lfloor x\rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$. Nella successiva immagine [18] la costante γ è l'area blu.

[17] Questo risultato vale più in generale se $a_{n,m}$ sono elementi di uno spazio metrico; inoltre un simile risultato si ha quando i limiti $n \to \infty$ e/o $m \to \infty$ vengono rimpiazzati con limiti $x \to \hat{x}$ e/o $y \to \hat{y}$ dove le precedenti variabili si muovono in spazi metrici. Si veda ad esempio E12.8.

[18] Immagine di William Demchick, Creative Commons Attribution 3.0 Unported License, tratta da wikipedia.



E3.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Ese 5 del compito gennaio 2010.*
Sia $a_k = \sqrt[3]{k^3 + k} - k$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{1}{3} \log(n)$$

nel senso che il rapporto fra queste due successioni tende a 1 quando $n \to \infty$.

E3.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Ese 1 del compito 9 Aprile 2011.*
Sia (a_n) una successione di numeri reali, con $a_n \geq 0$. *(Proposto il 22 Mar ◊)*

(a) Si mostri che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora convergono anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \right) .$$

(b) Sia ora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, poniamo

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \ b = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \right) \ , \ c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

si mostri allora che $a^2 = 2b + c$.

Si vedano anche gli esercizi E2.8 e E2.7.

3.2 Successioni definite per ricorrenza

E3.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f(x) = x - x^3$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione definita per ricorrenza da $x_{n+1} = f(x_n)$. Si dimostri che esiste un $\lambda > 0$ tale che se $|x_0| < \lambda$ allora $x_n \to 0$, mentre se $|x_0| > \lambda$ allora $|x_n| \to \infty$; e possibilmente si calcoli questo λ.

E3.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*metodo Babilonese per la radice quadrata.*
Sia $S > 0$ e consideriamo la serie

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{S}{x_n} \right)$$

mostrate che $x_n \to \sqrt{S}$ e che, per $S \in [1/4, 1]$ e $x_0 = 1$, la convergenza è superquadratica, cioè

$$\left| x_n - \sqrt{S} \right| \leq 2^{1-2^n} \ .$$

Trovate una funzione $f(x)$ (dipendente da S) tale che la precedente iterazione si possa vedere come un metodo di Newton, cioè

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{S}{x} \right)$$

Generalizzate il metodo Babilonese per trovare una radice $\sqrt[k]{S}$

3.3 Serie

E3.12 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Data una serie $\sum_n^\infty a_n$ dire se le condizioni successive sono necessarie e/o sufficienti per la convergenza.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m\, \forall k \in \mathbb{N}\ \left| \sum_{j=n}^{n+k} a_k \right| < \varepsilon \tag{3.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m\ \left| \sum_{j=n}^{n+k} a_k \right| < \varepsilon \tag{3.3}$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m \forall k \in \mathbb{N}\ \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \tag{3.4}$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m\ \sum_{j=n}^{n+k} |a_k| < \varepsilon \tag{3.5}$$

E3.13 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Trovate due successioni $(a_n)_n, (b_n)_n$ con $a_n, b_n > 0$ tali che $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ è convergente, $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n b_n$ è non convergente, e $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

E3.14 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Sia (a_n) una successione di numeri reali (non necessariamente positivi) tali che la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converga ad $a \in \mathbb{R}$; sia $b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$; si mostri che se la serie $\sum_{n=1}^\infty b_n$ converge allora $a = 0$.

E3.15 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Trovare due esempi di $a_{i,j} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

- tale che, per ogni i, $\sum_j a_{i,j} = 0$, mentre per ogni j, $\sum_i a_{i,j} = \infty$;
- tale che, per ogni i, $\sum_j a_{i,j} = 0$, mentre per ogni j, $\sum_i a_{i,j} = 1$.

Riuscite a trovare esempi dove sia abbia inoltre che $|a_{i,j}| \le 1$ per ogni i, j?

E3.16 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Data una successione $(a_n)_n$ di numeri strettamente positivi, si dice che *il prodotto infinito* $\prod_{n=0}^\infty a_n$ *converge* se esiste finito e strettamente positivo il limite dei prodotti parziali, cioè

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^N a_n \in (0, +\infty)\ .$$

Si dimostri che

(a) se $\prod_{n=0}^\infty a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

(b) se la serie $\sum_{n=0}^\infty |a_n - 1|$ converge, allora converge anche $\prod_{n=0}^\infty a_n$.

E3.17 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Indichiamo con $\mathcal{P}_\mathfrak{f}(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subseteq \mathbb{N}$ che sono insiemi finiti. Questo è detto *l'insieme delle parti finite*. Abbreviamo $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\mathfrak{f}(\mathbb{N})$ nel seguito.

Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali e un $B \in \mathcal{P}$ indichiamo con $s(B) = \sum_{n\in B} a_n$ la somma finita con indici in B.

Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converga ma non converga assolutamente. Allora:

- $\{s(F) : F \in \mathcal{P}\}$ è denso in $\mathbb{R}$.
- Esiste un riordinamento σ di $\mathbb{N}$, cioè una funzione bigettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che l'insieme delle somme parziali $\sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)}$ (al variare di N) è denso in $\mathbb{R}$.

E3.18 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*Questo risultato è attribuito a , si veda 3.54 in [6]..*

Sia data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (a un valore finito) ma $\lim_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$; per ogni l, L con $-\infty \leq l \leq L \leq +\infty$ esiste una permutazione $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che, posto $S_N = \sum k = 0^N a_{\pi(k)}$, si ha che

$$\limsup_{N\to\infty} S_N = L \quad , \quad \liminf_{N\to\infty} S_N = l \quad .$$

E3.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, dimostrare che per ogni $l \in \mathbb{R}$ esiste una successione $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ con $\varepsilon_n = \pm 1$ per ogni n, tale che $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n a_n) = l$.

Se invece $\sum_n a_n = S < \infty$, cosa si può dire dell'insieme E delle somme $\sum_n (\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ con $\varepsilon_n = \pm 1$ per ogni n?

- Analizzate i casi in cui $a_n = 2^{-n}$ oppure $a_n = 3^{-n}$
- Mostrate che E è sempre chiuso.
- Sotto quali ipotesi si ha che $E = [-S, S]$?

Suggerimento. Sia $\tilde{E}$ delle somme $\sum_n (\varepsilon_n a_n) = l$, al variare di $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ con $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ per ogni n; notate che $\tilde{E} = \{(S + x)/2 : x \in E\}$.

Si veda anche l'esercizio E19.1.

3.3.1 Prodotto di Cauchy

Definizione 3.20 *Date due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ a valori reali o complessi, il loro* ***prodotto di Cauchy*** *è la successione $(c_n)_n$ data da*

$$c_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad .$$

E3.21 Se $a_n, b_n \geq 0$ si mostri che

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$.

E3.22 Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono assolutamente, si mostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge assolutamente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

E3.23 *[Teorema di Mertens].* Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, si mostri che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

E3.24 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si discuta il prodotto di Cauchy della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ con se stessa.

Si veda anche l'esercizio E13.6.

3.4 Successioni generalizzate

Sia nel seguito $(J, \leq)$ un insieme ordinato con la *proprietà filtrante*

$$\forall x, y \in J \,\exists z \in J,\ x < z, y < z \tag{3.6}$$

(Si veda la sezione 1.6.1). Sia $f : J \to \mathbb{R}$. Questa f è una generalizzazione [19] del concetto di *successione* e viene chiamata **rete**.

Definizione 3.25 *Diremo che*

$$\lim_{j\in J} f(j) = l \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists k \in J\, \forall j \in J,\ j \geq k \Rightarrow |l - f(j)| < \varepsilon \quad .$$

Similmente si definiscono i casi $l = \pm\infty$ (imitando le definizioni usate quando $J = \mathbb{N}$.)

E3.26 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che se esiste il limite $\lim_{j\in J} f(j)$ allora è unico.

E3.27 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Supponiamo che f sia monotona non decrescente, mostrate che $\lim_{j\in J} f(j)$ esiste (possibilmente infinito) e coincide con $\sup_J f$.

Deducete che esistono sempre

$$\limsup_{j\in J} f(j) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\in J} \sup_{k\geq j} f(k)$$

$$\liminf_{j\in J} f(j) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\in J} \inf_{k\geq j} f(k)$$

E3.28 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che esiste il limite $\lim_{j\in J} f(j) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\limsup_{j\in J} f(j) = \liminf_{j\in J} f(j) = j$.

3.5 Serie generalizzate

3.5.1 Serie generalizzate a termini positivi

Definizione 3.29 *Sia I una famiglia di indici e sia $a_i : I \to [0, \infty]$ una successione generalizzata, definiamo la somma $\sum_{i\in I} a_i$ come*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i\in K} a_i : K \in \mathcal{P}_{\mathfrak{f}}(I) \right\}$$

dove $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}(I)$ l'insieme dei sottoinsiemi $K \subseteq I$ che sono insiemi finiti.

E3.30 `Argomenti: . Prerequisiti:` E1.134`. Difficoltà: .`
`Note:`*Dal compitino del 27 marzo 2010.*.
Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommatoria *(Svolto il 20 Mar)*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n+m+1)^\alpha} \quad .$$

converge. Si discuta poi, per $N \geq 3$, la convergenza di

$$\sum_{(m_1,\ldots m_N)\in\mathbb{N}^N} \frac{1}{(1+m_1+\ldots+m_N)^\alpha} \quad .$$

E3.31 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia I una famiglia di indici, sia a_i una successione con $a_i \geq 0$; sia poi $\mathcal{F}$ una partizione di I (non necessariamente di cardinalità finita); mostrare allora che

$$\sum_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i\in F} a_i = \sum_{i\in I} a_i$$

E3.32 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Siano I famiglia di indici; sia $a_{i,j} : I \times \mathbb{N} \to [0, \infty]$ una successione generalizzata, tale che $j \mapsto a_{i,j}$ è *(Svolto il 20 Mar)*

[19] L'insieme $J = \mathbb{N}$ con il suo usuale ordinamento ha la proprietà filtrante

debolmente crescente, per ogni fissato i; si dimostri allora che

$$\sum_{i\in I} \lim_{j\to\infty} a_{i,j} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i\in I} a_{i,j} \ .$$

(Questa è una versione per le serie del noto *Teorema di convergenza monotona*).

E3.33 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Estendete il precedente, sostituendo $\mathbb{N}$ con un insieme di indici J filtrante secondo un ordinamento $\le$.

4 Topologia

Sia X un insieme fissato e non vuoto. Useremo questa notazione. Per ogni insieme $A \subseteq X$ definiamo che $A^c = X \setminus A$ è il **complementare di A**.

Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ) dove X è un insieme (non vuoto) con associata la famiglia τ degli aperti, che è detta **topologia**.

Definizione 4.1 *La **topologia** $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di X che vengono chiamati **aperti**. Questa famiglia gode di tre proprietà: $\emptyset, X$ sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto.*

*Un insieme A è **chiuso** se A^c è aperto.*

Definizione 4.2 *Siano dati $A, B \subseteq X$.*

1. ***La parte interna di A**, denotata da A°, è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A, e dunque è il più grande aperto contenuto in A;*
2. *la **chiusura di B**, denotata da $\overline{B}$, è la intersezione di tutti i chiusi che contengono B, cioè è il più piccolo chiuso che contiene B.*
3. *A si dice **denso in** B se $\overline{A} \supseteq B$.*[20]
4. *La **frontiera** ∂A di A è $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.*

Definizione 4.3 *Si dice che uno spazio topologico (X, τ) è T_2, o* "di Hausdorff"*, se $\forall x, y \in X$ esistono $U, V \in \tau$ aperti disgiunti con $x \in U, y \in V$.*

Uno spazio metrico è un caso particolare di spazio topologico, in quanto gli aperti dello spazio metrico soddisfano i requisiti della definizione 4.1; la topologia associata è sempre Hausdorff. I seguenti risultati dunque valgono anche per gli spazi metrici.

E4.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che se lo spazio è T_2 allora ogni singoletto $\{x\}$ è chiuso. *(Proposto il 1 feb)*

E4.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che se $A \subseteq B$ allora $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ e $A^\circ \subseteq B^\circ$ *(Svolto il 1 feb)*

E4.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che se $A = B^c$ allora $(\overline{B})^c = A^\circ$, usando le definizioni 4.1. *(Svolto il 1 feb)*

E4.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Notate che $A \supseteq A^\circ$ e $B \subseteq \overline{B}$, in genere. Mostrate che A è aperto se e solo se $A = A^\circ$; e che B è chiuso se e solo se $B = \overline{B}$, usando le definizioni 4.1. *(Svolto il 1 feb)*

E4.8 `Argomenti: parte interna. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$, mostrate che *(Svolto il 1 feb)*

$$A^\circ = (A^\circ)^\circ \ .$$

usando la definizione di A° data sopra.

(Per il caso di X spazio metrico, si veda anche il E5.23)

E4.9 `Argomenti: chiusura. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$, mostrate che *(Svolto il 1 feb)*

$$\overline{A} = \overline{\left(\overline{A}\right)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al E4.8, sia usando la definizione di $\overline{A}$ come "*intersezione di tutti i chiusi che contengono A*".

(Per il caso di X spazio metrico, si veda anche il E5.24)

E4.10 `Argomenti: chiusura, parte interna. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia dato X spazio topologico e $A \subseteq X$ aperto. *(Svolto il 1 feb)*

(a) Mostrate che $A \subseteq \left(\overline{A}\right)^\circ$ (la parte interna della chiusura di A).

(b) Trovate un esempio di insieme $A \subset \mathbb{R}$ aperto per cui $A \neq \left(\overline{A}\right)^\circ$.

(c) Formulate poi una simile relazione per A chiuso, passando ai complementari.

E4.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dati gli insiemi $A,\ B \subseteq \mathbb{R}$, si determinino le relazioni tra le seguenti coppie di insiemi *(Svolto il 1 feb prima parte)*

$$\begin{array}{ccc} \overline{A\cup B} & \text{e} & \overline{A}\cup\overline{B}\,, \\ \overline{A\cap B} & \text{e} & \overline{A}\cap\overline{B}\,, \\ (A\cup B)^\circ & \text{e} & A^\circ\cup B^\circ\,, \\ (A\cap B)^\circ & \text{e} & A^\circ\cap B^\circ\,. \end{array}$$

E4.12 `Argomenti: . Prerequisiti: 1.88, E1.91. Difficoltà: .`

Consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi [21], con questo ordinamento τ è un insieme diretto; notiamo che ha minimo, dato da $\emptyset$.

Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in A$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \tau : x \in A\}$ la famiglia degli aperti che contengono x: mostrate che $\mathcal{U}$ è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto (e in questo caso il minimo è $\{x\}$).

Per l'esercizio E1.91, quando $\{x\}$ non è aperto allora $\mathcal{U}$ è un insieme filtrante, e dunque può essere usato come famiglia di indici per definire un "limite". Vedremo applicazioni in sezione 4.7.

E4.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`

`Note:`*Compito del 25 Marzo 2017.*

Siano (X, τ), (Y, θ) due spazi topologici con intersezione non vuota e si supponga che le topologie ristrette a $C = X \cap Y$ coincidano (cioè $\tau_{|C} = \theta_{|C}$) [22] e che C sia aperto in entrambi le topologie (cioè $C \in \tau, C \in \theta$). Si dimostri che esiste una sola topologia σ su $Z = X \cup Y$ tale che $\sigma_{|X} = \tau$ e $\sigma_{|Y} = \theta$ e che $X, Y \in \sigma$. *(Proposto il 22 Mar *)*

4.1 Intorni, punti aderenti, punti isolati, punti di accumulazione

Definizione 4.14 (Intorni) [23] *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$.*

- *Si chiama **intorno** di x_0 un qualunque soprainsieme di un aperto contenente x_0.*
- *Si chiama **sistema fondamentale di intorni** di x_0 una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di intorni di x_0 con la proprietà che ogni intorno di x_0 contenga almeno uno degli U_i.*

Diremo che U è un *intorno aperto di x_0* semplicemente per dire che U è un aperto che contiene x_0.

Definizione 4.15 *Siano $E, F \subseteq X$:*

- *un punto $x_0 \in X$ si dice **aderente a** E se ogni intorno U di x_0 ha intersezione non vuota con E;*
- *un punto $x_0 \in E$ si dice **isolato in** E se esiste un intorno U di x_0 tale che $E \cap U = \{x_0\}$;*

(Notate che in certi casi E ammette al più un numero numerabile di punti isolati: si veda E5.69 e E4.72, e anche E5.70).

Definiamo inoltre questo concetto (già visto in 2.11 per il caso $X = \mathbb{R}$).

[20] Spesso quando si dice "A è denso in B" si ha che B è chiuso e $A \subseteq B$: in questo caso $\overline{A} = B$.

[21] Per riportarci formalmente alla definizione vista in 1.88 definiamo $A \preceq B \iff A \supseteq B$ e associamo l'ordinamento $\preceq$ a τ.

[22] Ricordiamo che $\tau_{|C} = \{B \cap C : B \in \tau\}$.

[23] Definizione 5.30 negli appunti 2017/18.

Definizione 4.16 (punto di accumulazione) *Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice* ***punto di accumulazione*** *per A se per ogni intorno U di x si ha che $U \cap A \setminus \{x\}$ è non vuoto.* [24]

Nella letteratura Inglese questa nozione si traduce anche come *"limit point"* (il che può creare confusione con la definizione 5.41); per questo non useremo questa dicitura. [25]

L'insieme di tutti i punti di accumulazione di A si chiama **derivato** e verrà indicato con $D(A)$.

E4.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Verificate che nelle definizioni 4.15 e 4.16 potete equivalentemente usare, al posto degli intorni U di x_0, gli intorni aperti U di x_0. *(Svolto il 1 feb ◊)*

E4.18 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Verificate che nelle definizioni 4.15 e 4.16 potete equivalentemente usare intorni U di x_0 scelti in un sistema fondamentali di intorni fissato. *(Svolto il 1 feb ◊)*

E4.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Verificate che l'insieme dei punti aderenti ad A coincide con la chiusura di A. *(Svolto il 8 feb ◊)*

E4.20 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.19. Difficoltà: .`

Verificate che $\overline{A} = A \cup D(A)$. *(Svolto il 8 feb ◊)*

E4.21 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Un $x \in X$ è punto di accumulazione per X [26] se e solo se il singoletto $\{x\}$ non è aperto. *(Svolto il 8 feb ◊)*

E4.22 `Argomenti: frontiera. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $A \subset X$. Ricordiamo la definizione di *frontiera* $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. *(Svolto il 1 feb)*

Si noti che ∂A è chiuso: infatti posto $B = A^c$ il complementare, si verifica facilmente che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{B}$. [27] In particolare abbiamo mostrato che $\partial A = \partial B$.

Mostrate che i tre insiemi $\partial A, A^\circ, B^\circ$ sono disgiunti, e che la loro unione è X; in particolare mostrate che i tre insiemi sono caratterizzati da queste tre proprietà:

- ogni intorno di x interseca sia A che B.
- esiste intorno di x contenuto in A,
- esiste intorno di x contenuto in B,

(Si veda anche E5.29 per il caso di spazi metrici).

E4.23 `Argomenti: frontiera. Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`

Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$; se A è aperto (o chiuso) la frontiera ∂A non ha parte interna; si ha $\partial A \supseteq \partial\partial A$ con uguaglianza se ∂A non ha parte interna; inoltre $\partial\partial A = \partial\partial\partial A$. *(Svolto il 1 feb)*

E4.24 `Argomenti: punti isolati. Prerequisiti: E4.20. Difficoltà: .`

Se (X, τ) è uno spazio topologico e $A \subset X$ non ha punti isolati, allora anche $\overline{A}$ non ha punti isolati. *(Svolto il 8 feb)*

E4.25 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*compitino 12/1/2013.*

Sia A un sottoinsieme aperto di X. Si dimostri che, per ogni sottoinsieme B di X , vale l'inclusione $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Si dimostri con un esempio che la conclusione non vale se si rimuove l'ipotesi che A sia aperto. *(Proposto il 1 feb)*

E4.26 `Argomenti: punti di accumulazione, punti isolati. Prerequisiti: 4.15. Difficoltà: .`

Dato $E \subseteq X$, distinguiamo i punti $x \in X$ in tre insiemi distinti che sono una partizione di X. *(Svolto il 8 feb)*

- Per ogni intorno U di x, $U \setminus \{x\}$ interseca E . Questi sono i *punti di accumulazione* di E.
- $x \in E$ e esiste un intorno U di x tale che $U \cap E = \{x\}$. Questi sono i *punti isolati* in E.
- *Descrivete ora voi il terzo insieme di punti*

[24] Potremmo chiamare $U \setminus \{x\}$ un "intorno bucato"; dunque stiamo chiedendo che l'intorno bucato $U \setminus \{x\}$ abbia intersezione non vuota con A; come già avevamo fatto in 2.11.

[25] Si veda a questo proposito *Condensation point*. Encyclopedia of Mathematics. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Condensation_point&oldid=31858

[26] Stiamo prendendo $A \equiv X$ nella definizione 4.16.

[27] Questo è affermato negli appunti 2015/16 nella definizione 5.14

4.2 Esempi

E4.27 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .

Consideriamo su $\mathbb{R}$ le famiglia $\tau_+ = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Mostrate che è una topologia. È Hausdorff? Calcolate chiusura, apertura, frontiera e derivato di questi insiemi: *(Svolto il 1 feb ◊, in parte)*

$$\{0\} \quad , \quad [0,1] \quad , \quad (0,1) \quad , \quad [0,\infty) \quad , \quad (-\infty,0] \quad , \quad (0,\infty) \quad , \quad (-\infty,0) \quad .$$

E4.28 Argomenti: . Prerequisiti: E4.64,E4.65. Difficoltà: .

Sia $X = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ di parti di X che contiene

- gli intervalli aperti (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
- le semirette $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ con $a \in \mathbb{R}$,
- le semirette $[-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$ con $b \in \mathbb{R}$.

(Notate l'analogia degli insiemi nel secondo e terzo punto, con gli "intorni di infinito" visti in Sez. 2.1).

Si mostri che $\mathcal{B}$ verifica le proprietà *(a),(b)* viste in E4.64. Sia τ dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico (X, τ) è detto **retta estesa**, spesso indicata $\overline{\mathbb{R}}$.

Questo spazio topologico è T2, è compatto (Esercizio E4.39), e è omoemorfo all'intervallo $[0, 1]$. Può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

E4.29 Argomenti: . Prerequisiti: E4.64,E4.65. Difficoltà: .

Sia $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ di parti di X che contiene

- gli intervalli aperti (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
- gl insiemi $(a, +\infty) \cup (-\infty, b) \cup \{\infty\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Si mostri che $\mathcal{B}$ verifica le proprietà *(a),(b)* viste in E4.64. Sia τ dunque la topologia generata da questa base. Lo spazio topologico (X, τ) è detto **retta compattificata a un punto**. Questo spazio topologico è T2, è compatto (Eser. E4.40); è omeomorfo alla circonferenza (Eser. E5.134) dunque può essere dotato di una distanza che genera la topologia sopra descritta.

E4.30 Argomenti: ordinamento diretto. Prerequisiti: 1.88. Difficoltà: .

Sia $(J, \leq)$ un insieme con ordinamento diretto. Decidiamo che un "aperto" in J è un insieme A che contiene una "semiretta" della forma $\{k \in J : k \geq j\}$ (per un $j \in J$)[28]. Sia dunque τ la famiglia di tutti tali aperti, a cui aggiungiamo $\emptyset, J$. Mostrate che τ è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Quali sono i punti di accumulazione?

E4.31 Argomenti: punto di accumulazione, massimo, ordinamento diretto. Prerequisiti: 1.88, E4.30. Difficoltà: .

Trovate un semplice esempio di insieme $(J, \leq)$ con ordinamento diretto che ha massimo ma, associandovi la topologia τ_J dell'esempio precedente, non ha punti di accumulazione.

E4.32 Argomenti: ordinamento diretto. Prerequisiti: 1.87, 1.88, E1.91. Difficoltà: .

Sia $(I, \leq)$ un insieme con ordinamento diretto e con un massimo che chiamiamo ∞. Chiamiamo $J = I \setminus \{\infty\}$ e assumiamo che J sia filtrante (con l'ordinamento indotto). In questo caso proponiamo una topologia più fine. La topologia τ per I contiene:

- $\emptyset, I$,
- gli insiemi A che contengono una "semiretta" della forma $\{k \in I : k \geq j\}$, per un $j < \infty$, e
- i sottoinsiemi di I che non contengono ∞.

Mostrate che τ è una topologia. Questa topologia è Hausdorff? Mostrate che ∞ è l'unico punto di accumulazione.

La precedente costruzione si può usare in questo modo.

[28] Potremmo chiamare un tale A un *intorno di infinito*, come già si fece in Sez. 2.1.

Nota 4.33 *Sia $(J, \leq)$ un insieme con ordinamento filtrante. Sappiamo da E1.91 che J non ha massimo. Estendiamo $(J, \leq)$ aggiungendo un punto "∞": poniamo $I = J \cup \{\infty\}$ e decidiamo che $x \leq \infty$ per ogni $x \in J$. Si verifica facilmente che $(I, \leq)$ è un ordinamento diretto, e ovviamente ∞ è il massimo di I.*[29] *Sia τ la topologia definita in E4.32. Sappiamo che ∞ è punto di accumulazione. Questa topologia può spiegare in senso topologico il limite già definito in 3.25, e altri esempi che vedremo in Sez. 4.7.*

4.3 Topologie generate

E4.34 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia X un insieme e $\mathcal{V}$ una famiglia di parti di X; definiamo τ come l'intersezione di tutte le topologie che contengono $\mathcal{V}$ cioè

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \{\sigma, \sigma \supseteq \mathcal{B}, \sigma \text{ topologia in } X\}$$

τ è la *"topologia generata da $\mathcal{V}$"*; è anche detta *"la più piccola topologia che contiene $\mathcal{V}$"*. Mostrate che τ è una topologia.

Si vedano anche gli esercizi E4.65.

4.4 Compattezza

Definizione 4.35 *Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è* compatto[30] *se da ogni famiglia di aperti $(A_i)_{i \in I}$ la cui unione $\bigcup_{i \in I} A_i$ copre K si può scegliere un numero finito $J \subset I$ di aperti la cui unione $\bigcup_{i \in J} A_i$ copre K.*

[Se formulate questi esercizi in spazi metrici, potete usare il teorema 5.81 a pagina 52 per trattare con gli insiemi compatti.]

E4.36 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*teorema 5.59 appunti 2017/18.*

Supponiamo che lo spazio topologico sia T_2 (si veda 4.3). Si mostri che ogni sottoinsieme compatto è chiuso.

E4.37 `Argomenti: compatti. Prerequisiti: E4.36. Difficoltà: .`

`Note:` *Per il caso reale si può vedere E2.10 o il teorema dell'intersezione di Cantor. Per il caso di spazi metrici si veda E5.89..*

Sia (X, τ) uno spazio topologico T2 e siano $A_n \subseteq X$ sottoinsiemi compatti non vuoti tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$: allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. *(Svolto il 8 Mar)*

Cosa succede se lo spazio non è T2?

E4.38 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.36. Difficoltà: .`

Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici, con X compatto e Y uno spazio T_2. Sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva; si mostri che f è un omeomorfismo fra X e la sua immagine $f(X)$.

E4.39 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.28. Difficoltà: .`

Si mostri che la *retta estesa* (lo spazio topologico mostrato in E4.28) è compatta.

E4.40 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.29. Difficoltà: .`

Si mostri che la *retta compattificata* (lo spazio topologico mostrato in E4.29) è compatta.

Si veda anche l'esercizio E4.54 per una caratterizzazione degli insiemi compatti tramite le *reti*.

4.5 Connessione

Sia (X, τ) spazio topologico. Dati $A, B \subseteq X$, per abbreviare le formule useremo la notazione (nonstandard)

- $A\mathbf{i}B$ per dire che A, B hanno intersezione non vuota,
- $A\mathbf{d}B$ per dire che sono disgiunti, e
- $\mathbf{n}A$ per dire che A non è vuoto.

[29]Dunque $(I, \leq)$ non è un ordinamento filtrante.
[30]Dalla definizione si ricava che l'insieme vuoto è compatto. Alcuni testo però escludono esplicitamente questo caso.

Ricordiamo la definizione di *s/connessione* (Cap 5 Sez 9 degli appunti 2015/16).

- Lo spazio X è sconnesso se è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti.
- Lo spazio X è connesso se non è sconnesso. In simboli,

$$\forall A, B \in \tau, (\mathbf{n}A \wedge \mathbf{n}B \wedge X \subseteq A \cup B) \Rightarrow A\mathbf{i}B\,.$$

- Un suo sottoinsieme $E \subseteq X$ nonvuoto è sconnesso se è sconnesso con la topologia indotta; cioè se E è coperto dall'unione di due aperti, ciascuno dei quali interseca E, ma che sono disgiunti in E; in simboli,

$$\exists A, B \in \tau, E\mathbf{i}A \wedge E\mathbf{i}B \wedge E \subseteq A \cup B \wedge A \cap B \cap E = \emptyset\,. \tag{4.1}$$

- Similmente $E \subseteq X$ nonvuoto è connesso se è connesso con la topologia indotta. Questo si scrive così

$$\forall A, B \in \tau, (E\mathbf{i}A \wedge E\mathbf{i}B \wedge E \subseteq A \cup B) \Rightarrow A \cap B \cap E \neq \emptyset\,. \tag{4.2}$$

È consuetudine assumere che l'insieme vuoto sia connesso; questo caso però è di scarso interesse, in genere lo escluderemo nei seguenti esercizi.

Vi sono molte maniere equivalenti di esprimere le precedenti definizioni; le lasciamo come (semplici) esercizi.

E4.41 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Lo spazio X è sconnesso se e solo se è l'unione disgiunta di due chiusi non vuoti. *(Proposto il 19 Apr ◊)*

E4.42 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Un sottoinsieme $E \subseteq X$ nonvuoto è sconnesso se E è coperto dall'unione di due chiusi, ciascuno dei quali interseca E, ma che sono disgiunti in E. *(Proposto il 19 Apr ◊)*

E4.43 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
X è sconneso se e solo se esistono $A, B \subset X$ nonvuoti la cui unione copre X, ma tali che $\overline{B}\mathbf{d}A$ e $B\mathbf{d}\overline{A}$. *(Svolto il 26 Apr ◊)*

E4.44 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Supponiamo che $E \subseteq X$ sia sconnesso, possiamo supporre che *(Svolto il 26 Apr)*

$$\exists A, B \in \tau, E\mathbf{i}A \wedge E\mathbf{i}B \wedge E \subseteq A \cup B \wedge A\mathbf{d}B\,. \tag{4.3}$$

cioè che esistano di due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca E e che E sia coperto dalla loro unione?

Si veda anche E5.54.

E4.45 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Teorema 5.69 appunti 2016/17.*
Sia I una famiglia di indici. Si mostri che se E_i è una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali che

$$\bigcap_{i \in I} E_i \neq \emptyset\,,$$

allora $E = \cup_{i=1} E_i$ è connesso.

Definizione 4.46 *Dato $x \in X$, diremo che la* componente connessa *di X contenente x è l'unione di tutti i connessi che contengono x. L'esercizio precedente mostra che la* componente connessa *è, per l'appunto, un connesso.*

E4.47 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Sez 10.2 appunti 2016/17.*
Si mostri che due componenti connesse o sono disgiunte o coincidono. Dunque lo spazio X si partiziona in componenti connesse.

E4.48 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Sez 10.2 appunti 2016/17.*
Sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso; sia K una componente connessa di C: si mostri che K è chiuso.

E4.49 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia ora (X, d) uno spazio metrico dove le palle aperte $B(x, r)$ sono anche chiuse. Si mostri che le componenti connesse di X sono tutti e solo i singoletti $\{x\}$.

(Un tale spazio è detto *totalmente disconnesso*).

Si vedano anche gli esercizi in Sez. 5.4.

4.6 Reti

Useremo i concetti di *ordinamento diretto*, *ordinamento filtrante* e *insieme cofinale* già discussi in Sez. 1.6.1.

Definizione 4.50 *Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff. Sia $(J, \leq)$ un insieme con ordinamento filtrante (definita in 1.87). Sia $\varphi : J \to Y$ una* **rete** *(già incontrata in Sez. 3.4).*

Si pone $\lim_{j\in J} \varphi(x) = \ell \in Y$ se e solo se, per ogni intorno V di ℓ in Y si ha che $\varphi(j) \in V$ definitivamente per $j \in J$.

La definizione di *definitivamente* è in 1.94, e significa che esiste $k \in J$ tale che per ogni $j \geq k$ si ha $\varphi(j) \in V$.

E4.51 `Argomenti: . Prerequisiti: E1.91. Difficoltà: .`

Sia X Hausdorff. Sia J un insieme diretto ma non filtrante; allora sia $m \in J$ il suo massimo (che esiste per quanto visto in E1.91); se definiamo $\lim_{j\in J} \varphi(x)$ come in 4.50, mostrate che il limite esiste sempre e vale $\varphi(m)$.

E4.52 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff, sia $A \subseteq Y$. Si mostri che $\overline{A}$ coincide con l'insieme di tutti i possibili limiti di reti $\varphi : J \to A$ (al variare della scelta di J e poi di φ).

E4.53 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia (Y, σ) spazio topologico Hausdorff, sia $A \subseteq Y$. Si mostri che $x \in Y$ è punto di accumulazione per A se e solo se esiste un J insieme filtrante e esiste una rete $\varphi : J \to A \setminus \{x\}$ tale che $\lim_{j\in J} \varphi(x) = x$.

E4.54 `Argomenti: . Prerequisiti: 1.92. Difficoltà: ⋆⋆.`

Data una rete $\varphi : J \to Y$, se $I \subseteq J$ è *cofinale* e $\psi : I \to Y$ è la restrizione di φ a I, allora diremo che ψ è una **sottorete** di φ.

Mostrate che Y è compatto se e solo se ogni rete a valori in Y ammette una sottorete convergente.

4.7 Continuità e limiti

Definizione 4.55 (Limite) [31] *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici, con (Y, σ) Hausdorff.* [32] *Sia $E \subseteq X$ e $f : E \to Y$. Sia inoltre x_0 un punto di accumulazione di E in X. Si pone $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in Y$ se e solo se, per ogni intorno V di ℓ in Y, esiste U intorno di x_0 in X tale che $f(U \cap E \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.*

Si dice che f è **continua in** x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Si dice che f è **continua** se $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$ per ogni $y \in X$, o equivalentemente se $f^{-1}(A) \in \tau$ per ogni $A \in \sigma$ (Teor. 5.32 negli appunti 2017/18).

E4.56 `Argomenti: . Prerequisiti: 4.33. Difficoltà: .`

Spiegate come la definizione 4.50 si può vedere come un caso particolare della 4.55 (Sugg. procedete come in nota 4.33 e ponete $E = J, X = I, x_0 = \infty$).

E4.57 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.56. Difficoltà: .`

Siano X, Y Hausdorff. Sia $E \subseteq X$, sia $f : E \to Y$, sia x_0 un punto di accumulazione di E in X.

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora, per ogni rete $\varphi : J \to X$ con $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$ si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = \ell$.
- Consideriamo l'insieme filtrante J dato dagli intorni di x_0; [33] consideriamo le reti $\varphi : J \to X$ con la proprietà che $\varphi(U) \in U \setminus \{x_0\}$ per ogni $U \in J$; notiamo che si ha $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$; se per ogni tale rete si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = \ell$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

[31] Definizione 5.33 negli appunti 2017/18.

[32] Per avere unicità del limite e dunque dare un significato univoco a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ come elemento di Y.

[33] Il fatto che questo sia filtrante è stato mostrato in E1.91, E4.12 e E4.21

E4.58 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.51,E4.56. Difficoltà: .`

Siano X, Y Hausdorff. Sia $f : X \to Y$.

- Se f è continua in x_0 allora, per ogni rete $\varphi : J \to X$ con $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$ si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = f(x_0)$.
- Consideriamo l'insieme diretto J dato dagli intorni di x_0; consideriamo le reti $\varphi : J \to X$ con la proprietà che $\varphi(U) \in U$ per ogni $U \in J$; notiamo che si ha $\lim_{j\in J} \varphi(j) = x_0$; se per ogni tale rete si ha $\lim_{j\in J} f(\varphi(j)) = f(x_0)$ allora f è continua in x_0.

4.8 Basi

Definizione 4.59 (Base) *Dato uno spazio topologico (X, τ), una **base** [34] è una collezione $\mathcal{B}$ di aperti (cioè $\mathcal{B} \subseteq \tau$) con la proprietà che ogni elemento di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

Per esempio, se X è uno spazio metrico, allora la famiglia di tutte le palle aperte è una base.

E4.60 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; preso un aperto $A \in \tau$, per ogni $x \in A$ possiamo scegliere un $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x$, e tali che $A = \bigcup_{x\in A} B_x$. *(Proposto il il 22 feb ◊)*

E4.61 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.60. Difficoltà: .`

Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Mostrate che, dato $x \in X$, *(Proposto il 22 feb ◊)*

$$\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di x .

E4.62 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.18, E4.61, E4.60. Difficoltà: .`

Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X. Mostrate che dato $A \subseteq X$, sia ha che *(Proposto il 22 feb ◊)*

$$A^\circ = \bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$$

mentre

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall B \in \mathcal{B}, x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset\}$$

E4.63 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.34. Difficoltà: .`

Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e sia $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$; sia τ la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$, mostrate che $\mathcal{B}$ non è una base per τ. *(Svolto il 22 feb)*

È dunque interessante cercare di capire quando una famiglia $\mathcal{B}$ può essere base per una topologia.

E4.64 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; allora valgono le due proprietà seguenti. *(Svolto il 22 feb)*

(a) $\bigcup \mathcal{B} = X$ cioè l'unione di tutti gli elementi della base è X.

(b) Dati $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste $B_3 \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

E4.65 `Argomenti: . Prerequisiti: topologia generata E4.34. Difficoltà: .`

Viceversa sia X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi che verifica le precedenti proprietà *(a),(b)* viste in E4.64; sia τ la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$. Si verifichi $\mathcal{B}$ è una base per τ. *(Svolto il 22 feb)*

E4.66 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.34,E4.66,E4.64,E4.65. Difficoltà: .`

Applichiamo i precedenti risultati alla *topologia prodotto* τ: questa si può vedere in due maniere equivalenti. *(Svolto il 22 feb)*

- Unione di tutti i prodotti cartesiani di aperti [35]

$$\tau = \left\{ \bigcup_j \prod_{i=1}^n A_{i,j} : A_{1,j} \in \tau_1, \dots A_{n,j} \in \tau_n \forall j \right\} .$$

[34] capitolo 5 sezione 6 definizione 6.4 negli appunti 2012/13

[35] Così definita all'inizio del Cap 6 degli appunti 2017/18.

- τ è la più piccola topologia che contiene i prodotti cartesiani di aperti.

E4.67 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.66,E4.64,E4.65. Difficoltà: .`
Siano ora $X_1, \ldots X_n$ spazi topologici con topologie rispettivamente $\tau_1, \ldots \tau_n$ e siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots \mathcal{B}_n$ basi per questi spazi; sia $X = \prod_{i=1}^n X_i$ il prodotto cartesiano, e sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n A_i : A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2, \ldots A_n \in \mathcal{B}_n \right\}$$

la famiglia di tutti i prodotti cartesiani di elementi scelti dalle rispettive basi. Mostrate che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia prodotto. Vedete anche l'esercizio E5.36 per una applicazione al caso di spazi metrici.

E4.68 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.60. Difficoltà: .`
Dato X, date $\mathcal{C}$ base per una topologia σ su X, e $\mathcal{B}$ base per una topologia β su X, si ha che $\sigma \supseteq \beta$ se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni $B \in \mathcal{B}, B \ni x$ esiste $C \in \mathcal{C}, C \ni x, C \subseteq B$.

E4.69 `Argomenti: . Prerequisiti: 1.88, E4.64. Difficoltà: .`
Verifichiamo che quanto espresso in E4.12 vale anche per le "basi". Sia $\mathcal{B}$ una base per una topologia τ su X; consideriamo l'ordinamento discendente fra insiemi (formalmente $A \preceq B \iff A \supseteq B$); con questo ordinamento $(\mathcal{B}, \preceq)$ è un insieme diretto, il cui minimo è $\emptyset$. Supponiamo ora che la topologia sia Hausdorff. Preso poi $x \in X$, sia $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{B} : x \in A\}$ la famiglia degli elementi della base che contengono x: mostrate che $\mathcal{U}$ è un insieme diretto; mostrate che ha minimo se e solo se il singoletto $\{x\}$ è aperto.

4.9 Spazi primo- e secondo-numerabili

Definizione 4.70 *Uno spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilità* [36] *se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile (*i.e. *per ogni punto esiste una famiglia numerabile di intorni aperti di quel punto, e tutti questi intorni messi insieme sono una base della topologia).*

Definizione 4.71 *Uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile.*

E4.72 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Se (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, se $A \subseteq X$ è composto solo da punti isolati, allora A ha cardinalità numerabile o finita. *(Proposto il 22 Mar *)*

E4.73 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.62. Difficoltà: .`
Se (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, dato $A \subseteq X$ esiste un sottoinsieme numerabile $B \subseteq A$ tale che $\overline{B} \supseteq A$. In particolare l'intero spazio X ammette un sottoinsieme numerabile denso: si dice che X è *separabile*. Il viceversa vale ad esempio negli spazi metrici, si veda E5.31. Si veda anche E5.66 per un applicazione in $\mathbb{R}^n$. *(Proposto il 22 Mar *)*

Gli assiomi di numerabilità ritorneranno negli esercizi E5.30 e E5.31.

4.10 Spazi non primo-numerabili

E4.74 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Fate riferimento all'esempio http://dida.sns.it/dida2/cl/08-09/folde0/pdf9 dove si studia lo spazio topologico (X, τ), con $X = [0,1]^\Omega$ e τ la topologia data dagli intorni *(Proposto il 22 Mar *)*

$$U^f_{E,\rho} = \{g \in X, \forall x \in E, |f(x) - g(x)| < \rho\}$$

dove $f \in \Omega$, $\rho > 0$ e $E \subset \Omega$ finito. Questa topologia è la *topologia prodotto* delle topologie di $\mathbb{R}$. Nel testo riferito si mostra che, se Ω è infinito non numerabile, allora (X, τ) non ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni.

- Verificate che la topologia è T_2.

[36] capitolo 5 sezione 7 definizione 7.3 negli appunti 2012/13; Definizione 5.38 degli appunti 2017/18

- Notate che X è uno spazio vettoriale, e mostrate che l'operazione di somma è continua, come operazione $X \times X \to X$. [37]
- Dati $B_i \subset \mathbb{R}$ aperti non-vuoti , uno per ciascun $i \in \Omega$, mostrate che $\prod_i B_i$ è aperto se e solo se $B_i = \mathbb{R}$ salvo al più finiti i. Similmente per i chiusi.
- Sia Ω infinito non numerabile. Risolvete gli esercizi presenti nel testo: posto

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in X, f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \in \Omega\} \tag{4.4}$$

mostrate che si ha $\overline{C} = X$; e che se $(f_n) \subset C$ e $f_n \to f$ puntualmente allora $f \in C$.

E4.75 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà:` $\star$.

Restringiamo la topologia descritta nell'esempio precedente all'insieme $Y = [0, 1]^{[0,1]}$ (cioè, restringiamo $\mathbb{R}$ a $[0, 1]$, e poniamo $\Omega = [0, 1]$). Trovate una successione $(f_n) \subset Y$ che non ammetta una sottosuccessione convergente. *(Proposto il 22 Mar *)*

Ricordiamo la definizione 4.35: uno spazio X è "compatto per ricoprimenti" se, per ogni $(A_i)_{i\in I}$ famiglia di aperti tale che $\bigcup_{i\in I} A_i = X$, esiste una sotto famiglia finita $J \subset I$ tale che $\bigcup_{i\in J} A_i = X$. Sappiate che, per un importante teorema dovuto a Tychonoff, questo spazio Y è "compatto per ricoprimenti". Questo esercizio vi mostra invece che Y non è "compatto per successioni".

[37] Ricordiamo che un intorno in $X' \times X''$ è del tipo $V' \times V''$ dove V', V'' sono intorni in X' e X'' rispettivamente.

5 Spazi metrici

Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme (non vuoto) con associata una distanza d.

Definizione 5.1 *Una **distanza** è una funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$ che gode delle seguenti proprietà:*

- $d(x, x) = 0$*;*
- *(proprietà di separazione) se $d(x, y) = 0$ allora $x = y$;*
- *(simmetria) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;*
- *(diseguaglianza triangolare) $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.*

Un esempio è dato da $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|$.

Definizione 5.2 *Dati una successione $(x_n)_n \subseteq X$ e $x \in X$,*

- *diremo che **“$(x_n)_n$ converge a x”** se $\lim_n d(x_n, x) = 0$; scriveremo anche $x_n \to_n x$ per indicare che la successione converge a x.*
- *Diremo che **“$(x_n)_n$ è una successione di Cauchy”** se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \, , \; \forall n, m \geq N \; d(x_n, x_m) < \varepsilon \; .$$

[Nota. Se non siete familiari con il concetto di spazio metrico, potete assumere che $X = \mathbb{R}^n$ e $d(x, y) = |x - y|$ in tutti gli esercizi.]

E5.3 Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$ mostrate che se converge a un punto allora è di Cauchy.

E5.4 Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$ mostrate che se converge a x e converge a y allora $x = y$.

Questo risultato è noto come *Teorema dell’unicità del limite*.

E5.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Generalizziamo la definizione di *spazio metrico* assumendo che $d : X \to [0, \infty]$ (gli altri assiomi sono uguali). Mostrate che $x \sim y \iff d(x, y) < \infty$ è una relazione di equivalenza, e che le classi di equivalenza sono aperte, e dunque sono sconnesse una dall’altra. *(Svolto il 8 feb)*

E5.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*Vedere anche eserc. E9.41.*

Supponiamo che $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sia monotona debolmente crescente e subadditiva, cioè $\varphi(t) + \varphi(s) \geq \varphi(t + s)$ per ogni $t, s \geq 0$; e supponiamo che $\varphi(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. *(Svolto il 8 feb)*

Allora $\varphi \circ d$ è ancora una distanza. Esempi: $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $\varphi(t) = t/(1 + t)$, $\varphi(t) = \arctan(t)$, $\varphi(t) = \min\{t, 1\}$.

Mostrate inoltre che se φ è continua in zero allora la topologia associata è la stessa.[38]

E5.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se $(x_n)_n \subset X$ è una successione e $x \in X$, si mostri che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ se e solo se, per ogni sotto–successione n_k esiste una sotto–sotto–successione n_{k_h} tale che $\lim_{n\to\infty} x_{n_{k_h}} = x$. *(Svolto il 8 feb)*

E5.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Una successione $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy se e solo se

$$\lim_{N\to\infty} \sup\{d(x_n, x_m) : n \geq N, m \geq M\} = 0 \; .$$

E5.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Una successione $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy se e solo se esiste una successione ε_n con $\varepsilon_n \geq 0$ e $\varepsilon_n \to_n 0$ per cui per ogni n e ogni $m \geq n$ si ha $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$. *(Svolto il il 22 feb)*

E5.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy e esistono x e una sottosuccessione n_m tale che $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x$ allora $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *(Svolto il il 22 feb ?)*

E5.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $\varepsilon_n > 0$ una successione decrescente infinitesima. Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy esiste una sottosuccessione n_k tale che (Svolto il il 22 feb ?)

$$\forall k,\ \forall h,\ h > k \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_h}) \le \varepsilon_k\ .$$

Questa proprietà viene spesso usata ponendo $\varepsilon_n = 2^{-n}$, o altra successione la cui serie converge.

E5.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $(x_n)_n$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$: si provi che è una successione di Cauchy. (Svolto il il 22 feb ?)
Confrontate questo esercizio, il precedente E5.11 nel caso in cui $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, e l'esercizio E5.10.

E5.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se $(x_n) \subset X$ è una successione di Cauchy, $(y_n) \subset X$ è un'altra successione, e $d(x_n, y_n) \to_n 0$, allora $(y_n) \subset X$ è una successione di Cauchy.

E5.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*Prop. 5.43 degli appunti 2016/17.*

Preso (X, d) uno spazio metrico, si mostri che d è continua (come funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$); e anzi che è Lipschitziana.

E5.15 `Argomenti: . Prerequisiti: E2.8, E9.41.Difficoltà: ★.`

`Note:`*Esercizio 2 compito 9 Luglio 2011.*

Sia $\alpha(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$, limitata e strettamente positiva. Date f, g continue su $\mathbb{R}$, si ponga (Proposto il per il 29 feb *)

$$d(f,g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \big(\min\{\alpha(x), |f(x) - g(x)|\}\big)\ .$$

Si dimostri che d è una distanza su $C(\mathbb{R})$ e che $(C(\mathbb{R}), d)$ è completo.

5.1 Topologia in spazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 5.16 (palla,disco) *Siano dati $x \in X, r > 0$; indicheremo con $B(x, r)$, o con $B_r(x)$, la **palla**,*

$$B(x,r) \stackrel{def}{=} \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

e con

$$D(x,r) \stackrel{def}{=} \{y \in X : d(x,y) \le r\}$$

*il **disco**.*

Definizione 5.17 *Per gli esercizi seguenti definiamo che*

1. *un insieme E è **aperto** se*
$$\forall\, x_0 \in E\ ,\ \exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq E\ ; \tag{5.1}$$
equivalentemente, E è aperto se è unione di palle. Si mostra che $\emptyset, X$ sono aperti; l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto; l'unione di un numero arbitrario di aperti è un aperto. Dunque questi aperti formano una topologia.

2. *la **parte interna** E° di un insieme E è*
$$E^\circ = \big\{x \in E : \text{ esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subseteq E\big\}\ ; \tag{5.2}$$
si verifica facilmente che $E^\circ \subseteq E$, e che E è aperto se e solo se $E^\circ = E$.

[38] Si veda la successiva Sez. 5.1 per un riepilogo delle definizioni riguardo alla topologia in spazi metrici.

3. *un punto $x_0 \in X$ è* ***aderente*** *a E se*

$$\forall\, r>0\,,\quad E\cap B_r(x_0)\neq\emptyset\,;$$

4. *la* ***chiusura*** *$\overline{E}$ di E è l'insieme dei punti aderenti; si verifica facilmente che $E\subseteq\overline{E}$.*
5. *Un insieme è* ***chiuso*** *se $\overline{E}=E$.*
6. *A si dice* ***denso in*** *B se $\overline{A}\supseteq B$, cioè se per ogni $x\in B$ e per ogni $r>0$ l'intersezione $B_r(x)\cap A$ è non vuota.*

Notate che, avendo la definizione operativa (5.1) di "aperto", allora gli assiomi (nella definizione 4.1) in questo caso diventano teoremi.

E5.18 `Argomenti: parte interna. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $B_r(x)$ è un aperto usando la definizione (5.1).

E5.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che uno spazio metrico è T_2 (si veda la definizione in 4.3).

E5.20 `Argomenti: .Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se $A=B^c$ allora mostrate che $(\overline{B})^c=A^\circ$ (usando le definizioni di questa sezione). *(Proposto il per il 20 feb)*

E5.21 `Prerequisiti: E5.20.` Mostrate che le nozioni di *parte interna* e *chiusura* viste qui sopra sono equivalenti a quelle presentate nella definizione 4.1. *(Proposto il per il 20 feb)*

E5.22 `Argomenti: parte interna. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che se $A\subseteq B\subset X$ e A è aperto allora $A\subseteq B^\circ$ usando la definizioni sopra riportate.

E5.23 `Argomenti: parte interna. Prerequisiti: E5.18. Difficoltà: .`
Dato X spazio metrico e $A\subseteq X$, mostrate che *(Proposto il per il 20 feb)*

$$A^\circ=(A^\circ)^\circ\ ,$$

usando la definizioni sopra riportate.

(Per il caso di X spazio topologico, si veda il E4.8)

E5.24 `Argomenti: chiusura. Prerequisiti: E5.20. Difficoltà: .` *(Proposto il per il 20 feb)*
Dato X spazio metrico e $A\subseteq X$, mostrate che

$$\overline{A}=\overline{\left(\overline{A}\right)}$$

sia per passaggio al complementare rispetto al E5.23, sia usando la definizione di $\overline{A}$ come "*insieme dei punti aderenti*".

E5.25 `Argomenti: parte interna. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $E\subseteq X$, allora E è uno spazio metrico con la distanza ristretta $\tilde d=d|_{E\times E}$.

Mostrate che $A\subseteq E$ è aperto in $(E,\tilde d)$ (secondo la definizione all'inizio di questa sezione) se e solo esiste $B\subseteq X$ aperto in (X,d) per cui $B\cap E=A$.

(Il secondo modo di definire "aperto" è usato nella topologia).

E5.26 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.66,E4.68, E6.3, E6.7 e E6.8. Difficoltà: .`
Presi $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ spazi metrici, sia $X=X_1\times\cdots\times X_n$; dato che ogni spazio metrico ha una topologia, possiamo definire su X la topologia prodotto (si veda E4.66).

Sia φ una delle norme definite in eqn. (6.1) in Sez. 6.1. Due possibili esempi sono $\varphi(x)=|x_1|+\cdots+|x_n|$ oppure $\varphi(x)=\max_{i=1\dots n}|x_i|$.

Definiamo infine per $x,y\in X$

$$d(x,y)=\varphi(d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n))\quad . \tag{5.3}$$

Si mostri che d è una distanza; si mostri che la topologia in (X, d) coincide con la topologia prodotto.

Si noti che questo approccio generalizza il modo con cui viene definita la distanza Euclidea fra punti in $\mathbb{R}^n$ *(prendendo* $X_i = \mathbb{R}$ *e* $\varphi(z) = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$*). Ne deduciamo che la topologia di* $\mathbb{R}^n$ *è il prodotto delle topologie di* $\mathbb{R}$.

Si veda anche l'esercizio E5.36.

E5.27 `Argomenti: .Prerequisiti: E5.14.Difficoltà: .`
Sia $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ il disco [40]; si mostri che è chiuso.

E5.28 `Argomenti: .Prerequisiti: E5.18,E5.27.Difficoltà: .`
Sia $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ il disco; si mostri che $\overline{B(x, r)} \subseteq D(x, r)$.

Sia $S(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) = r\}$ la sfera; si mostri che $\partial B(x, r) \subseteq S(x, r)$.

Si trovino esempi di spazi metrici in cui non valgono le uguaglianze (una, o entrambe).

Si trovi un esempio di spazio metrico in cui vi è un disco che è aperto[41].

(Si veda anche E5.64 per il caso dello spazio $\mathbb{R}^n$).

E5.29 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.22. Difficoltà: .`
Dato $A \subseteq X$ spazio metrico, si ha che $x \in \partial A$ se e solo se esistono $(y_n) \subseteq A$ e $(z_n) \subseteq A^c$ con $y_n \to x$ e $z_n \to x$.

E5.30 `Argomenti: . Prerequisiti: Sec. 4.9. Difficoltà: .`
Trovate un esempio di spazio metrico (M, d) che non soddisfi il secondo assioma di numerabilità, cioè tale che non esiste una base numerabile per la topologia associata a (M, d).

E5.31 `Argomenti: . Prerequisiti: Sec. 4.9. Difficoltà: .`
Sia (M, d) uno spazio metrico e supponiamo che esista $D \subseteq M$ che sia numerabile e denso. In questo caso si dice che (M, d) è *separabile*. Mostrate che (M, d) soddisfa il secondo assioma di numerabilità. *(Proposto il 22 Mar)*

Il viceversa è vero in qualunque spazio topologico, si veda E4.73.

E5.32 `Argomenti: chiusura, parte interna. Prerequisiti: E4.10, E5.20. Difficoltà: *.`
Sia X è uno spazio metrico, e $A \subseteq X$. Vogliamo studiare la operazione "apre-chiude" $\overline{(A^\circ)}$ (che è la chiusura della parte interna di A). *(Svolto il 22 mar)*

- Mostrate un semplice esempio in cui $\overline{(A^\circ)}$ non è contenuto ne contiene A.
- Scrivete poi una caratterizzazione di $\overline{(A^\circ)}$ usando successioni e palle.
- Usatela per mostrare che l'operazione "apre-chiude" è idempotente, cioè, se $D = \overline{(A^\circ)}$ e poi $E = \overline{(D^\circ)}$ allora $E = D$.

E5.33 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.48. Difficoltà: .`
Mostrate che, per ogni insieme chiuso $C \subseteq X$ esistono numerabili insiemi aperti A_n tali che $\bigcap_n A_n = C$. *(Svolto il 22 mar)*

Un insieme ottenuto come intersezione di numerabili aperti è noto come "un insieme G_δ". Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni chiuso è un G_δ.

Passando al complementare si ottiene questa affermazione. Un insieme ottenuto come unione di numerabili chiusi è noto come "un insieme F_σ". Il precedente esercizio mostra che in uno spazio metrico ogni aperto è un F_σ.

Si veda anche la sezione 8.2.

E5.34 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: **.`
Trovate un esempio di spazio metrico in cui per ogni $x \in X, r > 0$ si ha che $B_r(x)$ è un chiuso, ma la topologia associata non è discreta. [42]

Notiamo che un tale spazio deve essere *totalmente disconnesso* come mostrato in E4.49.

[40] Già definito in 5.16

[41] Vi sono anche spazi in cui ogni palla è chiusa, si veda E5.34.

[42] La topologia discreta è quella in cui tutti gli insiemi sono aperti, e dunque chiusi. Equivalentemente la topologia discreta è quella in cui ogni singoletto è un aperto.

5.1.1 Basi di palle

Per affrontare questi esercizi è necessario conoscere i concetti visti nella Sez. 4.8.

E5.35 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.64, E4.65. Difficoltà: .`
Mostrate che l'intersezione di due palle è un aperto (secondo la definizione 5.17). Si ottiene che la famiglia di tutte le palle soddisfa i requisiti *(a)* e *(b)* in esercizio E4.64; dunque, per quanto mostrato in E4.65, la famiglia delle palle è una base per la topologia che essa genera (che è la topologia associata allo spazio metrico).

E5.36 Rivediamo l'esercizio E5.26.

Presi $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, sia $X = X_1 \times X_1 \times \cdots \times X_n$; dato che ogni spazio metrico ha una topologia, possiamo definire su X la topologia prodotto.

Sia d la distanza

$$d(x, y) = \max_{i=1,\ldots n} d_i(x_i, y_i) \ .$$

Questa è la stessa d definita come in eqn. (5.3) di E5.26, ponendo $\varphi(x) = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$. Indichiamo con $B^d(x, r)$ la palla in (X, d) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$.

Vogliamo mostrare che d induce la topologia prodotto su X, usando i risultati visti in Sec. 4.8.

Presi $t \in X_i, r > 0$ indichiamo con $B^{d_i}(t, r)$ la palla nello spazio metrico (X_i, d_i). Sia $\mathcal{B}_i$ la famiglia di tutte le palle in (X_i, d_i).

Sia $\mathcal{B}$ definito come

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} B^{d_i}(x_i, r_i) : \forall i, x_i \in X_i, r_i > 0 \right\}$$

questo è lo stesso $\mathcal{B}$ definito in E4.67.

Mostrate che ogni palla $B^d(x, r)$ in (X, d) è il prodotto cartesiano delle palle $B^{d_i}(x_i, r)$ in (X_i, d_i). Sia dunque $\mathcal{P}$ la famiglia delle palle $B^d(x, r)$ in (X, d).

Da E5.35 sappiamo che $\mathcal{P}$ è una base per la topologia standard nello spazio metrico (X, d).

Usate E4.68 per mostrare che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ generano la stessa topologia τ.

Usate E4.67 per mostrare che τ è la topologia prodotto.

Se ne conclude che la distanza d genera la topologia prodotto.

5.1.2 Punti di accumulazione, punti limite

Ridefiniamo questa nozione (caso speciale di quella vista in 4.16)

Definizione 5.37 (punto di accumulazione) *Dato $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice* punto di accumulazione *per A se, per ogni $r > 0$ si ha che $B(x, r) \cap A \setminus \{x\}$ è non vuoto.*

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama **derivato**, lo indicheremo con $D(A)$.

E5.38 `Argomenti: .Prerequisiti: .Difficoltà: .`
Verificate che

- ogni punto aderente è anche punto di accumulazione, in simboli $D(A) \subseteq \overline{A}$;
- se un punto aderente a A non è in A allora è di accumulazione;

così si ottiene $\overline{A} = A \cup D(A)$.

E5.39 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia (X, d) spazio metrico, e $x \in X$. Mostrate che $A = \{x\}$ è chiuso; e che A ha parte interna vuota se e solo se x è punto di accumulazione. *(Svolto il 22 mar ◊)*

E5.40 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $A \subseteq X$ e sia $D(A)$ il *derivato* (cioè l'insieme dei suoi punti di accumulazione). Si mostri che $D(A)$ è chiuso.

Aggiungiamo questa definizione.

Definizione 5.41 (punto limite) *Data una successione $(x_n)_n \subseteq X$, un punto $x \in X$ si dice* punto limite *per $(x_n)_n$ se esiste una sottosuccessione n_k tale che $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$.*

Nella letteratura Inglese questa nozione si traduce “ *cluster point*” (oppure “*accumulation point*” il che può creare confusione con la definizione 5.37).

E5.42 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Trovate un esempio di spazio metrico (X, d) e di una successione limitata $(x_k)_k \subseteq X$ che ha un unico punto limite x ma che non converge.

Si veda anche E5.65.

E5.43 `Argomenti: .Prerequisiti: E5.4,E5.10.Difficoltà: .`

- Se una successione $(a_k)_k \subseteq X$ converge a x allora ha un unico punto limite, che è x.
- Se una successione di Cauchy $(a_k)_k \subseteq X$ ha un punto limite allora vi è un unico punto limite x e $\lim_k a_k = x$.

Altri esercizi su questi argomenti sono E5.60, E5.61, E5.62, E5.65 e E5.70.

5.2 Quozienti

E5.44 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Supponiamo che d soddisfi tutti i requisiti di distanza salvo che la “*proprietà di separazione*”; consideriamo la relazione $\sim$ su X definita come $x \sim y \iff d(x, y) = 0$; mostrate che è una relazione di equivalenza. Definiamo $Y = X/\sim$; mostrate che la funzione d passa al quoziente, cioè che esiste $\tilde{d} : Y \times Y \to [0, \infty)$ tale che, per ogni scelta di classi $s, t \in Y$ e ogni scelta di $x \in s, y \in t$ si ha $\tilde{d}(s, t) = d(x, y)$. Mostrate infine che $\tilde{d}$ è una distanza su Y. *(Proposto il 22 Mar)*

Questo procedura è l’equivalente in spazi metrici del *quoziente di Kolmogoroff*.

E5.45 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia (X, d) uno spazio metrico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X; sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come *(Proposto il 22 Mar)*

$$\delta(x, y) = \inf\{d(s, t) : s \in x, t \in y\} . \tag{5.4}$$

È una distanza su Y? Di quali proprietà gode fra quelle indicate in 5.1?

E5.46 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia (X, d) uno spazio metrico dove X è anche un gruppo, sia Θ un sottogruppo. *(Proposto il 22 Mar *)*

Definiamo che $x \sim y \iff xy^{-1} \in \Theta$. Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Sia $Y = X/\sim$ lo spazio quoziente. [43]

Supponiamo che d sia invariante rispetto alla moltiplicazione a sinistra per elementi di Θ:

$$d(x, y) = d(\theta x, \theta y)\ \forall x, y \in X, \forall \theta \in \Theta . \tag{5.5}$$

(Questo equivale a dire che, per ogni fissato $\theta \in \Theta$ la mappa $x \mapsto \theta x$ è una isometria). Definiamo la funzione $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ come in (5.4).

- Mostrate che, prese $s, t \in X$, si ha
$$\delta([s], [t]) = \inf\{d(s, \theta t) : \theta \in \Theta\} \tag{5.6}$$
dove $[s]$ è la classe di elementi equivalenti a s.
- Mostrate che $\delta \geq 0$, che è simmetrica e che soddisfa la disuguaglianza triangolare.
- Supponiamo che, per ogni fissato $t \in X$, la mappa $\theta \mapsto \theta t$ sia continua da Θ a X; supponiamo inoltre che Θ sia chiuso: allora δ è una distanza. [44]

[43] Se Θ è un sottogruppo normale allora si scrive anche X/Θ, che è un gruppo.
[44] Notate che, usando E8.22, in queste ipotesi la mappa di moltiplicazione $(\theta, x) \mapsto \theta x$ è continua da $\Theta \times X$ in X.

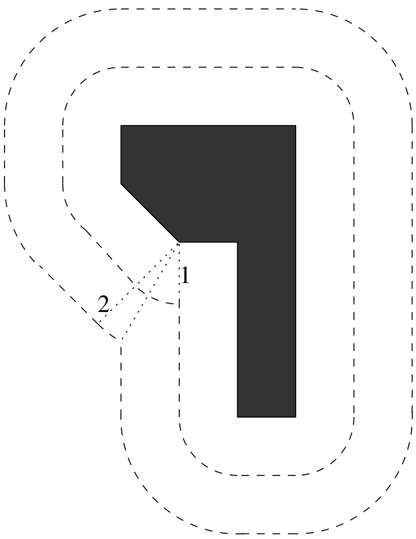


Figure 1: Fattening of a set; exercise E5.49

5.3 Funzione distanza

Definizione 5.47 *Preso uno spazio metrico* (M, d), *dato* $A \subset M$ *nonvuoto si definisce la* ***funzione distanza*** $d_A : M \to \mathbb{R}$ *come*

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) \,. \tag{5.7}$$

E5.48 `Argomenti: funzione distanza. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

(Svolto il 22 Mar)

(a) Mostrate che d_A è Lipschitziana.

(b) Mostrate che $d_A \equiv d_{\overline{A}}$.

(c) Mostrate che $\{x, d_A(x) = 0\} = \bar{A}$.

(d) Se $M = \mathbb{R}^n$ e A è chiuso nonvuoto, mostrate che l'estremo superiore in (5.7) è un minimo.

Si veda anche E9.44 e E9.45.

E5.49 `Argomenti: insieme ingrassato. Prerequisiti: E5.48. Difficoltà: .`
Consideriamo uno spazio metrico (M, d). Sia A chiuso e non vuoto, sia $r > 0$ fissato, e sia d_A la funzione distanza definita come in eqn. (5.7). Sia poi $E = \{x, d_A(x) \le r\}$, notate che è chiuso.

(a) Mostrate che

$$d_E(x) \ge \max\{0, (d_A(x) - r)\} \,. \tag{5.8}$$

(b) Mostrate che in (5.8) si ha uguaglianza se $M = \mathbb{R}^N$.

(c) Date un semplice esempio di spazio metrico in cui non si ha uguaglianza in (5.8).

(d) Se $M = \mathbb{R}^n$, dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso nonvuoto, mostrate che $E = A \oplus D_r$ dove $D_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x, |x| \le r\}$ e

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y, x \in A, y \in B\}$$

è la *somma di Minkowski* dei due insiemi (si anche veda la sezione 6.5).

The set $\{x, d_A(x) \le r\} = A \oplus D_r$ is sometimes called the *"fattening"* of A. In figure 1 we see an example of a set A fattened to $r = 1, 2$; the set A is the black polygon (and is filled in), whereas the dashed lines in the drawing are the contours of the fattened sets. [45] Si vedano anche le proprietà in sezioni 6.5 e 6.6.

[45] The fattened sets are not drawn filled — otherwise they would cover A.

5.4 Connessione

Si vedano le definizioni in Sez. 4.5. Definiamo inoltre questa nozione.

Definizione 5.50 *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* "connesso per archi" *se per ogni* $x, y \in X$ *esiste un arco continuo* $\gamma : [a, b] \to X$ *con* $x = \gamma(a), y = \gamma(b)$.

E5.51 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Trovate una successione di chiusi connessi $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ e l'intersezione $\bigcap_n C_n$ è non vuoto e sconnesso. *(Svolto il 26 Apr)*

Si può trovare un simile esempio in $\mathbb{R}$?

E5.52 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Trovate una successione di chiusi connessi per archi $C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ e l'intersezione $\bigcap_n C_n$ è non vuoto, connesso, ma non connesso per archi. *(Svolto il 26 Apr)*

E5.53 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*capitolo 5 sezione 10.3 appunti 2016/17.*
Consideriamo l'esempio di insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da

$$E = \{(0, t) : -1 \le t \le 1\} \cup \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0, 1] \right\} \quad . \tag{5.9}$$

Mostrare che questo insieme è chiuso, connesso, ma non è connesso per archi.

E5.54 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Sia (X, d) uno spazio metrico. Mostrate che $E \subseteq X$ è sconnesso se e solo se *"esistono due aperti disgiunti, ciascuno dei quali interseca* E *e tali che* E *sia coperto dalla loro unione"* (si veda la proposizione formalizzata in eqn. (4.3) nell' esercizio E4.44). *(Svolto il 26 Apr)*

E5.55 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ numerabile; si mostri che $\mathbb{R}^2 \setminus D$ è connesso per archi. *(Proposto il 19 Apr)*

5.5 Topologia in $\mathbb{R}$

E5.56 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Teorema 5.65 appunti 2016/17.*
Mostrate che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo è convesso, se e solo se è connesso.

(Notate come in questo caso gli esercizi E1.103 e E4.45 vadano a coincidere).

E5.57 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme A dei numeri della forma $\alpha n + m$ con n, m interi. Si mostri che A è denso in $\mathbb{R}$ se e solo se α è irrazionale.

E5.58 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dato $I \subset \mathbb{Q}$ nonvuoto, mostrate che I è connesso se e solo I contiene un solo punto.

E5.59 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrare che ogni $A \subset \mathbb{R}$ non-vuoto aperto è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti.

E5.60 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Trovare un compatto $A \subset \mathbb{R}$ che abbia un numero numerabile di punti di accumulazione.

E5.61 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrare che l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ definito come

$$A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \ge 1\} \cup \{1/n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}, n \ge 1, m \ge 1\}$$

è compatto; identificare i suoi punti di accumulazione.

E5.62 `Argomenti: derivato. Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆⋆.`
Sia $A \subset \mathbb{R}$; definiamo che $D(A)$ è il derivato di A (cioè l'insieme dei punti di accumulazione di A). Descrivere un insieme chiuso A tale che gli insiemi *(Proposto il 13 Mar *)*

$$A, D(A), D(D(A)), D(D(D(A)))\dots$$

siano tutti diversi.

E5.63 `Argomenti: chiusura, parte interna.Prerequisiti: E5.23, E5.24,E4.10, E5.32.Difficoltà: ⋆⋆.`
Trovare un insieme A di $\mathbb{R}$ tale che i seguenti 7 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ risultino tutti distinti: *(Proposto il 13 Mar *)*

$$A,\ \overline{A},\ A^\circ,\ \left(\overline{A}\right)^\circ,\ \overline{(A^\circ)},\ \overline{\left(\left(\overline{A}\right)^\circ\right)},\ \left(\overline{(A^\circ)}\right)^\circ .$$

Dimostrare inoltre che non se ne possono creare altri proseguendo nella stessa maniera (anche sostituendo $\mathbb{R}$ con un generico spazio metrico).

5.6 Topologia in $\mathbb{R}^n$

Nel seguito consideriamo lo spazio metrico $\mathbb{R}^n$ con la usuale distanza euclidea.

E5.64 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.28. Difficoltà: .`
Sia $B(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ la palla; sia $D(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \le r\}$ il disco; sia $S(x,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$ la sfera. Si mostri che $\overline{B(x,r)} = D(x,r)$ e $\partial B(x,r) = S(x,r)$. Si mostri inoltre che $B(x,r)$ non è chiuso e $D(x,r)$ non è aperto.

E5.65 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.43, E5.7. Difficoltà: .`
Data una successione $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$, questi fatti sono equivalenti

a la successione è limitata e ha un unico punto limite x

b $\lim_k x_k = x$.

Si veda anche E5.42.

E5.66 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.22. Difficoltà: .`
Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso nonvuoto, esiste $B \subseteq A$ tale che $A = \partial B$.

In quali casi si può trovare B numerabile?

In quali casi si può trovare B chiuso?

Si veda anche E4.73.

E5.67 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.26. Difficoltà: .`
Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso nonvuoto, esiste $F \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $E = D(F)$.

Si può trovare $F \subseteq E$?

E5.68 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Quali sono gli insiemi $A \subset \mathbb{R}^n$ che sono sia aperti che chiusi? *(Proposto il 19 Apr)*

E5.69 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $\mathbb{R}^N$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

E5.70 `Argomenti: punti isolati. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*esercizio 4 nel compito del 13/1/2011.*
Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è composto solo da punti isolati, allora A ha cardinalità numerabile o finita.

Viceversa dunque se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è più che numerabile allora il derivato $D(A)$ è non vuoto.

E5.71 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $I \subset A$ soddisfacente:

- I è finito,
- $\forall x, y \in I$, $x \neq y$ si ha $x \notin B(y, \varepsilon)$ (cioè $d(x,y) \geq \varepsilon$),

- $$A \subseteq \bigcup_{x \in I} B(x, \varepsilon) \ .$$

E5.72 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Qual è la cardinalità della famiglia degli insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$?

E5.73 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto tale che ogni funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ ammetta massimo: si mostri che E è compatto. *(Svolto il 8 Mar ◊)*

(Si veda E5.88 per la generalizzazione a spazi metrici)

5.7 Isometrie

Definizione 5.74 [46] *Dati (M_1, d_1) e (M_2, d_2) spazi metrici, una mappa $\varphi : M_1 \to M_2$ è detta una* ***isometria*** *se*

$$\forall x, y \in M_1, \ d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \ . \tag{5.10}$$

Vedremo in Sez. 6.2 la stessa definizione nel caso di spazi vettoriali normati.
Ovviamente una isometria è Lipschitziana, e dunque continua. Le isometrie godono di alcune proprietà.

E5.75 `Argomenti: isometria. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Una isometria è sempre iniettiva.

E5.76 `Argomenti: isometria. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se la isometria φ è surgettiva (e dunque è bigettiva) allora anche la inversa φ^{-1} è una isometria.

E5.77 `Argomenti: isometria. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se (M_1, d_1) è completo allora la sua immagine $\varphi(M_1)$ è un insieme completo in M_2; e dunque è un chiuso in M_2 (per la Prop. 5.46 negli appunto 2015/16).

Conseguentemente se la isometria φ è bigettiva e uno dei due spazi è completo allora anche l'altro è completo.

E5.78 `Argomenti: isometria. Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Siano (X, d) spazio metrico compatto; sia $T : X \to X$ una isometria, allora T è surgettiva.

Date un semplice esempio di spazio metrico non compatto e di $T : X \to X$ isometria non surgettiva.

E5.79 `Argomenti: isometria. Prerequisiti: E5.78. Difficoltà: *.`
Siano (X, d) e (Y, δ) due spazi metrici di cui X compatto, $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$ due *isometrie*. Provare che allora T ed S sono bigettive.

E5.80 `Argomenti: isometria. Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Trovate un esempio di due spazi metrici (X, d) e (Y, δ) che non sono isometrici ma per cui esistono due isometrie $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$.

5.8 Compattezza

Il teorema di Heine-Borel si estende a questo contesto.

Teorema 5.81 *Dato uno spazio metrico (X, d) e un suo sottoinsieme $C \subseteq X$, le tre seguenti condizioni sono equivalenti.*

- C è sequenzialmente compatto*: ogni successione $(x_n) \subset C$ possiede una sottosuccessione convergente a un elemento di C.*
- C è compatto*: da ogni famiglia di aperti la cui unione copre C si può scegliere un numero finito di aperti la cui unione copre C.*

[46] Definizione 5.30 negli appunti 2015/16.

- *C è completo, ed è* totalmente limitato*: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono finiti punti $x_1 ... x_n \in C$ tali che $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.*

(Questo Teorema ha una generalizzazione in spazi topologici, si veda in E4.54).

5.81bis `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Posto $X = \mathbb{R}^n$ e d la usuale distanza Euclidea, preso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, usate il precedente teorema 5.81 per mostrare (come corollario) l'usuale teorema di Heine-Borel: *C è compatto se e solo se è chiuso e limitato*

E5.82 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Prop 5.59 appunti 2017/18.*
Si mostri che se $K \subset X$ è compatto allora è chiuso. (Si veda E4.36 per il caso di spazio topologico)

E5.83 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, con (X, d_X) compatto; sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva; si mostri che f è un omeomorfismo fra X e la sua immagine $f(X)$. (Si veda E4.38 per il caso di spazio topologico).

E5.84 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $n \geq 1$ naturale. Siano (X_i, d_i) spazi metrici compatti per $i = 1, ... n$; siano $y_{i,k} \in X_i$ per $i = 1, ... n$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione k_h tale che, per ogni fissato i, y_{i,k_h} converge, cioè esiste $\lim_{h\to\infty} y_{i,k_h}$. *(Svolto il 8 Mar)*

E5.85 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: **.`
Siano (X_i, d_i) spazi metrici compatti per $i \in \mathbb{N}$, e siano $y_{i,k} \in X_i$ per $i, k \in \mathbb{N}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione k_h tale che, per ogni fissato i, y_{i,k_h} converge, cioè esiste $\lim_{h\to\infty} y_{i,k_h}$. *(Svolto il 8 Mar)*

E5.86 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia dato uno spazio metrico (X, d). Come già in 5.16 definiamo il *disco* $D(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\}$ (che è chiuso). Diciamo che (X, d) è *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $D(x, \varepsilon)$ è compatto. Considerate questa proposizione.

*«**Proposizione** Uno spazio metrico localmente compatto è completo. **Dimostrazione** Sia $(x_n)_n \subset X$ una successione di Cauchy, allora definitivamente i suoi termini distano al più ε, dunque sono contenuti in una piccolo disco compatto, dunque esiste una sottosuccessione che converge, e allora per il risultato E5.10 tutta la successione converge. q.e.d.»*

Se secondo voi la proposizione è vera, riscrivete la dimostrazione in modo rigoroso. Se secondo voi è falsa, trovate un controesempio.

E5.87 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $C \subset X$. Si mostri che C è totalmente limitato se e solo se $\overline{C}$ è totalmente limitato. (Si veda 5.81 per la definizione di *totalmente limitato*). *(Svolto il 8 Mar)*

E5.88 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.43. Difficoltà: *.`
Sia (X, d) uno spazio metrico tale che ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ ammetta massimo: si mostri che lo spazio è compatto. *(Svolto il 8 Mar (cenni))*

(Si veda E5.73 per la formulazione con $X = \mathbb{R}^n$)

E5.89 `Argomenti: compatti. Prerequisiti: E5.82. Difficoltà: .`
Sia (X, d) uno spazio metrico, e siano $A_n \subseteq X$ sottoinsiemi compatti non vuoti tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$: allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. *(Questo risultato si può far derivare da E4.37; provate però a dare una dimostrazione diretta, usando la caratterizzazione di "compatto" come "compatto per successioni" , cioè il primo punto in 5.81).* *(Svolto il 8 Mar ◊)*

5.9 Teoremi e categorie di Baire

Vale il seguente *teorema della categoria di Baire* di cui vi sono vari enunciati equivalenti.

Teorema 5.90 [47] *Supponiamo che (X, d) sia completo.*

- *Dati numerabili A_n aperti densi in X, si ha che $\bigcap_n A_n$ è denso.*
- *Dati numerabili C_n chiusi con parte interna vuota in X, si ha che $\bigcup_n C_n$ ha parte interna vuota.*

Definizione 5.91 *Un insieme che è contenuto nell'unione di numeribili chiusi con parte interna vuota è detto* di prima categoria[48] *in X. In caso contrario, è detto* di seconda categoria.

E5.92 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:.`

Uno spazio metrico X completo è di seconda categoria in se stesso.

E5.93 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:.`

Posto $X = \mathbb{R}$, l'insieme degli irrazionali è di seconda categoria in $\mathbb{R}$.

E5.94 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:.`

Si rifletta sulle affermazioni:

- Un insieme chiuso C dentro uno spazio metrico completo (X, d) è un completo (se visto come spazio metrico (C, d)).
- L'insieme $C = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ è un chiuso in $\mathbb{R}$, dunque C è completo con la distanza $d(x, y) = |x - y|$.
- C è composto da numerabili punti.
- Un singoletto $\{x\}$ è un chiuso a parte interna vuota.

Perché non vi è contraddizione?

E5.95 `Argomenti: insieme perfetto. Prerequisiti: Es. E5.38. Difficoltà: .`

`Note:.`

Supponiamo che (X, d) sia uno spazio metrico completo. Un insieme chiuso senza punti isolati, cioè costituito da soli punti di accumulazione, è detto **insieme perfetto**. Mostrate che un insieme perfetto dentro X deve essere infinito più che numerabile.

E5.96 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Mostrate che l'insieme di Cantor è un insieme perfetto.

E5.97 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: **.`

Si provi che non è possibile ottenere $\mathbb{R}$ o un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ come unione numerabile di intervalli chiusi e limitati, a due a due disgiunti.

5.10 Prodotto di infiniti spazi metrici

E5.98 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.6. Difficoltà: .`

Sia $\varphi(t) = t/(1 + t)$. Siano (X, d_i) spazi metrici con $i \in \mathbb{N}$, sia $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, prese $f, g \in X$ definiamo la distanza su X come *(Proposto il 8 Mar)*

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\varphi(d_i(f(k), g(k))) .$$

Si dimostri che d è una distanza.

E5.99 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano $f, f_n \in X$, si mostri che $f_n \to_n f$ secondo questa metrica se e solo se per ogni k si ha $f_n(k) \to_n f(k)$. *(Proposto il 8 Mar)*

E5.100 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono completi, si provi che (X, d) è completo.

E5.101 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.85, E5.99. Difficoltà: ⋆.`
Se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono compatti, si provi che (X, d) è compatto. *(Svolto il 8 Mar)*

E5.102 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.101. Difficoltà: .`
Vogliamo definire una distanza per lo spazio delle successioni. Procediamo come in E5.98. Scegliamo $X_i = \mathbb{R}$ per ogni i e che d_i sia la distanza Euclidea allora per $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiamo

$$d(f, g) = \sum_k 2^{-k} \varphi(|f(k) - g(k)|) ;$$

abbiamo costruito uno spazio metrico delle successioni $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$.

Nello spazio delle successioni $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ definiamo

$$K = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall k, |f(k)| \le 1\}$$

Si mostri che K è compatto.

E5.103 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $N(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ che sono necessarie per coprire K (dall'esercizio precedente). Si stimi $N(\rho)$ per $\rho \to 0$.

Si veda anche la Sez. 5.13

5.11 Ultrametrica

Definizione 5.104 *Una* ultrametrica *è una metrica in cui la disuguaglianza triangolare è rafforzata dalla condizione*

$$d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\} . \tag{5.11}$$

E5.105 Mostrate che (5.11) implica che d soddisfa la diseguaglianza triangolare.

E5.106 Notate che se $d(x, y) \ne d(y, x)$ allora $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Intuitivamente, tutti i triangoli sono isosceli, e la base è più corta dei lati uguali.

E5.107 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che, date due palle $B(x, r)$ e $B(y, \rho)$ di raggio $0 < r \le \rho$ e che si intersecano, allora $B(x, r) \subseteq B(y, \rho)$. Similmente per i dischi $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \le r\}$ e $D(y, r)$.

E5.108 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che due palle $B(x, r)$ e $B(y, r)$ di uguale raggio sono disgiunte oppure sono coincidenti; in particolare sono coincidenti se e solo se $y \in B(x, r)$. Similmente per i dischi $D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : d(x, y) \le r\}$ e $D(y, r)$.

E5.109 Si mostri che ogni palla aperta $B(x, r)$ è anche chiusa. Si mostri che ogni disco chiuso $D(x, r)$ con $r > 0$ è anche aperto.

Per l'esercizio E4.49, se ne deduce che lo spazio è *totalmente disconnesso*.

E5.110 Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione continua in zero, monotona debolmente crescente e con $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$. Mostrate che $\tilde{d} = \varphi \circ d$ è ancora una ultrametrica. Mostrate che gli spazi (X, d) $(X, \tilde{d})$ hanno la stessa topologia.

Confrontate con l'esercizio E5.6, notate che non richiediamo che φ sia subadditiva.

[47] Teorema 5.51 negli appunti 2015/16.

[48] è detto a volte anche *insieme magro* (ad esempio in Wikipedia); mentre negli appunti di Da Prato un "insieme magro" è un insieme che ha parte interna della chiusura uguale al vuoto.

5.11.1 Ultrametrica delle successioni

Costruiamo questo esempio di *ultrametrica* sullo spazio delle successioni. [49]

Definizione 5.111 *Sia I un insieme nonvuoto, con almeno due elementi. Sia $X = \{f : \mathbb{N} \to I\} = I^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni. Siano $x, y \in X$. Se $x = y$ allora poniamo $d(x, y) = 0$.* [50] *Se $x \neq y$, posto*

$$c(x, y) = \min\{n \geq 0, x(n) \neq y(n)\} \tag{5.12}$$

il primo indice dove le successioni sono diverse, definiamo $d(x, y) = 2^{-c(x,y)}$.

Nota 5.112 *Per via dell'esercizio E5.110, potremmo equivalentemente definire $d(x, y) = \varepsilon_{c(x,y)}$ con $\varepsilon_n > 0$ successione decrescente infinitesima.*

E5.113 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$.

E5.114 `Argomenti: completo. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:.`
Si mostri che (X, d) è completo.

E5.115 `Argomenti: compatto. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che (X, d) è compatto se e solo se I è finito.

E5.116 `Argomenti: . Prerequisiti: E1.137. Difficoltà: .`
Supponiamo che I sia un gruppo; allora X è un gruppo (è il prodotto cartesiano di gruppi); e la moltiplicazione si effettua "componente per componente". Mostrate che il prodotto in X è un'operazione continua, e così per la mappa di inversione. Dunque (X, d) è un *gruppo topologico* .

E5.117 `Argomenti: . Prerequisiti: E1.137. Difficoltà: .`
Sia I un insieme di cardinalità 2, allora lo spazio (X, d) è omeomorfo all'insieme di Cantor (con la normale metrica Euclidea $|x - y|$).

Combinando questo risultato con E5.116 otteniamo che l'insieme di Cantor (con la sua usuale topologia) può essere dotato di una struttura di gruppo abeliano, dove la somma e l'inversa sono funzioni continue; ciò lo rende un gruppo topologico.

Si veda anche E5.151.

5.11.2 Ultrametrica p-adica

Riportiamo dagli appunti2015/16 (nel Cap 6 Sez 1) le definizione della *distanza p–adica* su $\mathbb{Q}$. Sia p un numero primo fissato.

Definizione 5.118 *Ogni numero razionale $x \neq 0$ si scompone in modo unico come prodotto*

$$x = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} , \tag{5.13}$$

*dove $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sono numeri primi e gli m_j interi relativi. Fissato come sopra un numero primo p, si definisce il **valore assoluto p–adico** di $x \in \mathbb{Q}$ come*

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ p^{-m} & \text{se } p^m \text{ è il fattore con base } p \text{ nella scomposizione (5.13)} . \end{cases}$$

*Definiamo infine $d(x, y) = |x - y|_p$, che risulterà essere una distanza su $\mathbb{Q}$, chiamata **distanza p–adica**.*

Aggiungiamo questa definizione, che sarà molto utile nel seguito.

[49] Basato su un esempio visto a lezione nel corso 2012/13.
[50] Questo può essere anche ottenuto definendo $c(x, x) = \infty$

Definizione 5.119 *Per n intero nonnullo definiamo*

$$\varphi_p(n) = \max\{h \in \mathbb{N}, p^h \text{ divide } n\} \ .$$

Poniamo inoltre $\varphi_p(0) = \infty$. Questa φ_p è nota come valutazione p-adica.

E5.120 Provate queste relazioni fondamentali.

(a) $|1|_p = 1$ e più in generale $|n|_p \le 1$ per ogni intero nonnullo n, con uguaglianza se n non è divisibile per p.

(b) Dato n intero nonnullo, si ha che $|n|_p = p^{-\varphi_p(n)}$.

(c) Dato n, m interi, si ha che $\varphi_p(n+m) \ge \min\{\varphi_p(n), \varphi_p(m)\}$ con uguaglianza se $\varphi_p(n) \ne \varphi_p(m)$.

(d) Dato n, m interi nonnulli, si ha che $\varphi_p(nm) = \varphi_p(n) + \varphi_p(m)$ e dunque $|nm|_p = |n|_p|m|_p$.

(e) Dato $x = a/b$ con a, b interi nonnulli si ha che $|x|_p = p^{-\varphi_p(a)+\varphi_p(b)}$. Notiamo che se a, b sono primi tra loro, allora uno dei due termini $\varphi_p(a), \varphi_p(b)$ è zero.

(f) Provate che $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ per $x, y \in \mathbb{Q}$.

(g) Provate che $|x/y|_p = |x|_p/|y|_p$ per $x, y \in \mathbb{Q}$ non nulli.

E5.121 Verificate che

$$|x + y|_p \le \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\} \tag{5.14}$$

per ogni $x,\ y \in \mathbb{Q}$. e dunque

$$d_p(x, z) \le \max\left\{d_p(x, y), d_p(y, z)\right\} \ , \qquad \forall\, x,\ y,\ z \in \mathbb{Q} \ .$$

cioè questa è una ultrametrica (e dunque una distanza).

Le proprietà E5.120f e (5.14) dicono che la *valutazione p-adica* è un valore assoluto, e anzi è una *Krull valuation*.

E5.122 Si mostri che la mappa di moltiplicazione è continua.

E5.123 Si trovi un esempio di successione che tende a zero (ma che non assume mai il valore 0). Questo esempio mostra che la topologia associata non è la topologia discreta.

E5.124 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Si mostri, per ogni $a/b \in \mathbb{Q}$ con a, b coprimi e b non divisibile per p, esiste $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$ tale che $|x_n - a/b|_p \to_n 0$. Si noti che la ipotesi è necessaria.

Si ottiene che $\mathbb{Z}$ è denso nel disco $\{x \in \mathbb{Q}, |x|_p \le 1\}$.

E5.125 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: **.`
Si mostri che $(\mathbb{Q}, d)$ non è uno spazio metrico completo.

E5.126 Si mostri che nessuna distanza p–adica su $\mathbb{Q}$ è bi–Lipschitz equivalente alla distanza euclidea (indotta da $\mathbb{R}$).

5.12 Circonferenza

Definizione 5.127 $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| = 1\}$ *è la* ***circonferenza*** *nel piano.*

È un chiuso in $\mathbb{R}^2$, dunque lo possiamo pensare come uno spazio metrico completo con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|_{\mathbb{R}^2}$.

Definizione 5.128 *Denotiamo con $\mathbb{R}/2\pi$ lo spazio quoziente $\mathbb{R}/\sim$ dove $x \sim y \iff (x - y)/(2\pi) \in \mathbb{Z}$ è una relazione di equivalenza che rende equivalenti punti che distano un multiplo intero di 2π. Questo spazio $\mathbb{R}/2\pi$ viene chiamato* ***lo spazio dei numeri reali modulo 2π.***

Come usuale dato $t \in \mathbb{R}$ indichiamo con $[t]$ la classe degli elementi in $\mathbb{R}/2\pi$ equivalenti a t.

E5.129 Considerate la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/2\pi &\to S^1 \\ [t] &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

mostrate che è ben definita e bigettiva.

E5.130 Tramite questa bigezione trasportiamo la distanza Euclidea da S^1 a $\mathbb{R}/2\pi$ definendo

$$d_e([s],[t]) = |\Phi([s]) - \Phi([t])|_{\mathbb{R}^2} \ .$$

Con questa scelta la mappa Φ risulta essere un isometria fra (S^1, d) e $(\mathbb{R}/2\pi, d_e)$ (si riveda la definizione 5.74). Dunque quest'ultimo è uno spazio metrico completo.

Con qualche semplice calcolo si ricava che

$$d_e([s],[t]) = \sqrt{|\cos(t) - \cos(s)|^2 + |\sin(t) - \sin(s)|^2} = \sqrt{2 - 2\cos(t-s)} \ .$$

Poi definiamo la

$$d_a([s],[t]) = \inf\{|s - t - 2\pi k| : k \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

mostrate che è una distanza su $\mathbb{R}/2\pi$.

E5.131 Mostrate che $d_a([s],[t])$ è la lunghezza del più corto arco in S^1 che collega $\Phi([s])$ a $\Phi([t])$.

E5.132 Mostrate che le distanze d_a e d_e sono equivalenti, dimostrando che $\frac{2}{\pi} d_a \le d_e \le d_a$.

E5.133 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.44. Difficoltà: .`

Si può facilmente mostrare che una funzione $f : \mathbb{R}/2\pi \to X$ può essere vista come una funzione periodica $\tilde{f} : \mathbb{R} \to X$ di periodo 2π, e viceversa.

Questo può essere facilmente ottenuto dalla relazione $f([t]) = \tilde{f}(t)$ dove t è un generico elemento della sua classe di equivalenza $[t]$; supponendo che $\tilde{f}$ sia periodica di periodo 2π, la precedente relazione permette di ricavare f da $\tilde{f}$ e viceversa.

Si mostri che f è continua se e solo se $\tilde{f}$ è continua.

E5.134 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.29. Difficoltà: .`

Sia (X, τ) la *retta compattificata*, lo spazio topologico definito in E4.29; si mostri che è omeomorfa a S^1.

5.13 Dimensione

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia nel seguito K un compatto nonvuoto in X, e $N(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ che sono necessarie per coprire K. [51]

Definizione 5.135 *Se esiste il limite*

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \tag{5.15}$$

diremo che questo limite è la ***dimensione di Minkowski*** $\dim(K)$ *di* K.

Se il limite non esiste, potremo comunque usare il limsup e il liminf per definire la *dimensione superiore e inferiore*.

Si noti che questa definizione dipende *a priori* dalla scelta della distanza, cioè $N = N(\rho, K, d)$ e $\dim = \dim(K, d)$. Si veda in particolare E5.142.

E5.136 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $N(\rho)$ è decrescente in ρ.

E5.137 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.84. Difficoltà: *.`
Mostrate che $N(\rho)$ è limitato se e solo se K contiene solo un numero finito di punti.

Dunque se K è infinito si deve avere $\lim_{\rho\to 0+} N(\rho) = \infty$.

E5.138 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Definito $N'(\rho)$ il minimo numero di palle di raggio ρ e centrate in K che sono necessarie per coprire K, allora

$$N'(2\rho) \le N(\rho) \le N'(\rho)\,.$$

Dunque la dimensione non cambia se si richiede che le palle siano centrate in punti di K.

E5.139 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $P(\rho)$ il numero numero massimo di palle di raggio ρ e centrate in K che sono disgiunte. Si mostri che

$$N(2\rho) \le P(\rho) \le N(\rho/2)\,.$$

Dunque la dimensione si può calcolare anche come

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{\log P(\rho)}{\log(1/\rho)}\,. \tag{5.16}$$

Una tale costruzione è nota come *ball packing* in Inglese. .

E5.140 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Nell'esercizio E5.139 è importante richiedere che le palle siano centrate in punti di K. Trovate un esempio di spazio metrico (X, d) e di $K \subseteq X$ compatto di dimensione finita, ma tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $\rho > 0$, esistono infinite palle disgiunte ciascuna contenente un solo punto di K.

E5.141 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrare che la dimensione non cambia se si usano i dischi

$$D(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y\,,\ d(x, y) \le r\}$$

invece delle $B(x, r)$.

E5.142 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.6. Difficoltà: .`
Sia $K \subseteq X$ compatto; sia $\alpha > 1$; sia $\tilde d(x, y) = \sqrt[\alpha]{d(x, y)}$, sappiamo da E5.6 che è una distanza. Mostrate che $\alpha \dim(K, d) = \dim(K, \tilde d)$.

In particolare $[0, 1]$ con la distanza $\tilde d(x, y) = \sqrt[\alpha]{|x - y|}$ ha dimensione α.

[51] Per il teorema di Heine-Borel 5.81 sappiamo che $N(\rho) < \infty$

E5.143 `Argomenti: norma. Prerequisiti: E6.4. Difficoltà: .`
Sia K un compatto in $\mathbb{R}^n$; supponiamo che esista il limite che definisce $\dim(K, |\cdot|)$ usando le palle della norma Euclidea. Data una norma ϕ possiamo definire la distanza $d(x,y) = \phi(x-y)$, e con questo calcolare la dimensione $\dim(K,\phi)$. Si mostri che $\dim(K, |\cdot|) = \dim(K,\phi)$.

E5.144 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Indichiamo un criterio operativo che può essere usato negli esercizi seguenti.

- Se esiste una successione descrescente $\rho_j \to 0$ e h_j interi tale che bastano h_j palle di raggio ρ_j per coprire K, allora
$$\limsup_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \le \limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} \ . \tag{5.17}$$
- Se viceversa esiste una successione descrescente $r_j \to 0$, e $C_n \subseteq K$ famiglie finite di punti che distano almeno r_j, cioè per cui
$$\forall x,y \in C_n, x \neq y \Rightarrow d(x,y) \ge r_j \, , \tag{5.18}$$
posta l_j la cardinalità di C_j, si ha
$$\liminf_{\rho\to 0+} \frac{\log N(\rho)}{\log(1/\rho)} \ge \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} \ . \tag{5.19}$$
Si noti che i punti di $x \in C_j$ sono centri di palle $B(x, r_j/2)$ disgiunte, dunque $l_j \le P(r_j/2)$, come definito in E5.139.

In particolare se
$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\log h_{j+1}}{\log(1/\rho_j)} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log l_j}{\log(1/r_{j+1})} = \beta \tag{5.20}$$
allora l'insieme K ha dimensione β.

E5.145 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.14 E5.143 E5.144. Difficoltà: *.`
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^m$ compatto. Consideriamo la famiglia dei cubi chiusi di lato 2^{-n} e centri nei punti della griglia $2^{-n}\mathbb{Z}^m$. La chiamiamo "*n-tassellatura*". Sia N_n il numero di cubi della *n-tassellatura* che intersecano K. Mostrate che N_n è debolmente crescente. Mostrate che il seguente limite esiste
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N_n}{n} \tag{5.21}$$
se e solo se esiste il limite (5.15) che definisce la dimensione, e se esistono coincidono. Questo approccio al calcolo della dimensione viene chiamato *Box Dimension* in Inglese.

Queste quantità hanno una interpretazione nella teoria "rate-distortion". "n" è la posizione dell'ultima cifra significativa (in base 2) nel determinare la posizione di un punto x. "$\log_2 N_n$" è il numero di "bit" necessari per identificare un qualunque $x \in K$ con tale precisione.

E5.146 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia a_n una successione positiva decrescente infinitesima. Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ dato da
$$K = \{0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}, n \ge 1\}\,;$$
notate che è compatto. Studiato la dimensione di K in questi casi:

- $a_n = n^{-\theta}$ con $\theta > 0$;
- $a_n = \theta^{-n}$ con $\theta > 1$;

E5.147 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano $1 \le d \le n$ interi. Sia $[0,1]^d$ un cubo di dimensione d, lo vediamo come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ponendo
$$K = [0,1]^d \times \{(0, 0 \ldots 0)\}$$
cioè
$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 \le x_1 \le 1, \ldots 0 \le x_d \le 1, x_{d+1} = \ldots = x_n = 0\}$$
Si mostri che la dimensione di K è d.

E5.148 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che la dimensione della (immagine della) curva frattale di Koch è $\log 4/\log 3$.

E5.149 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che la dimensione dell'insieme di Cantor è $\log(2)/\log(3)$.

E5.150 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dentro nell'insieme $X = C^0([0,a])$ dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ consideriamo

$$K = \{f, f(0) = 0, \forall x, y, |f(x) - f(y)| \le L|x - y|\}$$

dove $L > 0, a > 0$ sono fissati.

Si stimi $N(\rho)$ per $\rho \to 0$

E5.151 `Argomenti: ultrametrica. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $\lambda > 0$. Definiamo la ultrametrica delle successioni come in Sez. 5.11.1: sia I finito, di cardinalità p; sia $X = I^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni; sia c come in eqn. (5.12); sia $d(x, y) = \lambda^{-c(x,y)}$. Per gli esercizi E5.115 e 5.112 (X, d) è compatto.

Si mostri che la dimensione di (X, d) è $\log p/\log \lambda$.

E5.152 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Esibite un compatto $K \subset \mathbb{R}$ per cui non esiste il limite (5.15).

6 Spazi normati

E6.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$, mostrate che la norma è una funzione convessa.

E6.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$, mostrate che l'operazione somma $'+' : X \times X \to X$ è continua.

E6.3 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia X uno spazio vettoriale, siano ϕ, ψ due norme su esso. Mostrate che le topologie generate da ϕ e ψ coincidono, se e solo se esistono $0 < a < b$ tali che *(Svolto il 22 feb)*

$$\forall x,\ a\psi(x) \le \phi(x) \le b\psi(x)\ . \tag{6.1}$$

(Quando la relazione (6.1) sussiste, diremo che le norme sono *"equivalenti"*).

E6.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Vogliamo mostrare che "le norme in $\mathbb{R}^n$ sono tutte equivalenti". *(Svolto il 22 feb (cenni))*
Sia $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ la norma euclidea. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una norma: si può mostrare che ϕ è una funzione convessa E6.1, e dunque che è una funzione continua per E9.24. Usate questo fatto per dimostrare che esistono $0 < a < b$ tali che

$$\forall x,\ a\|x\| \le \phi(x) \le b\|x\|\ . \tag{6.2}$$

6.1 Norme in $\mathbb{R}^n$

Definizione 6.5 *Dato $p \in [1,\infty]$ si definiscono le norme $\|x\|_p$ su $\mathbb{R}^n$ con*

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & p \ne \infty \\ \max_{i=1}^n |x_i| & p = \infty \end{cases} \tag{6.3}$$

(Il fatto che queste siano norme si dimostra con la E6.11).

E6.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $\lim_{n\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. *(Svolto il 20 feb)*

E6.7 `Argomenti: . Prerequisiti: E11.53. Difficoltà: .`
Dati $t, s \in [1,\infty]$ con $s > t$ e $x \in \mathbb{R}^n$ mostrate che $\|x\|_s \le \|x\|_t$. Inoltre mostrate che $\|x\|_s < \|x\|_t$ se $n \ge 2$ e $x \ne 0$ e x non è multiplo di uno dei vettori della base canonica $e_1, \ldots e_n$. *(Svolto il 20 feb)*
(Suggerimento (1) usate che $1 + t^p \le (1+t)^p$ (2) usate i moltiplicatori di Lagrange (3) ricordiamo che $f(a+b) > f(a) + f(b)$ quando $a \ge 0, b > 0$ $f(0) = 0$ e $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa e continua in 0 (si veda l'esercizio E9.41), dunque derivate $\frac{d}{dt}(\log \|x\|_t)$ e ponete $f(z) = z\log(z)$).

E6.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dati $s, t \in [1,\infty]$ con $s < t$ mostrate che $n^{-1/s}\|x\|_s \le n^{-1/t}\|x\|_q$ (dove si intende $n^{-1/\infty} = 1$). (Notate che questa è una disuguaglianza fra medie). *(Svolto il 20 feb)*
(Sugg. ponete $\alpha = t/s$ e $y_i = |x_i|^s$ e usate la convessità di $f(y) = y^\alpha$. Altro suggerimento: usate E6.9.)

E6.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano dati $p, q \in [1,\infty]$ tali che $1/p + 1/q = 1$ [52] e $x, y \in \mathbb{R}^n$; si mostri la **disuguaglianza di Hölder** in questa forma *(Svolto il 20 feb)*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q \quad . \tag{6.4}$$

In quali casi si ha uguaglianza?

Sugg. assumete $x_i, y_i \ge 0$; per i casi con $p, q < \infty$ potete:

[52] Si intende che se $p = 1$ allora $q = \infty$; e viceversa.

- usare la disuguaglianza di Young (E9.42 o E19.15);
- usare i moltiplicatori di Lagrange;
- partire dal caso $n = 2$ e porre $x_1 = tx_1$ e $y_1 = ay_2$.

E6.10 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.9. Difficoltà: .`

Si deduca la versione (Proposto il il 20 feb)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \|x\|_p \|y\|_q \quad ; \tag{6.5}$$

dalla (6.4). In quale caso vale l'uguaglianza?

E6.11 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.9. Difficoltà: .`

Dato $p \in [1, \infty]$ si mostri la **disuguaglianza di Minkowski** (Svolto il 20 feb)

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

Se ne deduce che $\|x\|_p$ sono norme.

Per $p \in (1, \infty)$ trovate una semplice condizione (necessaria e sufficiente) che comporti l'uguaglianza.

E6.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $r > 0$; se $p \in [1, \infty]$ allora la palla $B^p_r = \{\|x\|_p < r\}$ è convessa; inoltre $B^p_r \subseteq B^{\tilde p}_r$ se $\tilde p > p$. (Svolto il 22 feb) Nel caso $n = 2$ del piano, studiare graficamente la forma delle palle al variare di p. Vi sono punti che si trovano sulla frontiera di tutte le palle?

E6.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se $r > 0$ e $p \in (1, \infty)$ allora la sfera $\{\|x\|_p = r\}$ è una superficie regolare.

E6.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dotiamo $\mathbb{R}^n$ della norma $\|x\|_\infty$: mostrare che in dimensione 2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \le 1\}$ è un (Svolto il 22 feb) quadrato, e in dimensione 3 è un cubo, *etc etc.*

Ora dotiamo $\mathbb{R}^n$ della norma $\|x\|_1$: mostrare che in dimensione 2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 \le 1\}$ è un *rombo* cioè precisamente un quadrato ruotato di 45 gradi; e in dimensione 3 il disco è un'ottaedro.

E6.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate una norma in $\mathbb{R}^2$ tale che la palla sia un poligono regolare di n lati. (Proposto il il 22 feb)

6.2 Isometrie

Riscriviamo la definizione 5.74 nel caso di spazi normati.

Definizione 6.16 *Se M_1, M_2 sono spazi vettoriali con norme $\|\|_{M_1}$ e rispettivamente $\|\|_{M_2}$, allora φ è un isometria quando*

$$\forall x, y \in M_1, \|x - y\|_{M_1} = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{M_2} \tag{6.6}$$

(riscrivendo la definizione di distanza usando le norme).

La confronteremo con questa definizione.

Definizione 6.17 *Siano B_1, B_2 due spazi vettoriali normati. Una funzione $f : B_1 \to B_2$ è un'**isometria lineare** se è lineare e se*

$$\|z\|_{B_1} = \|f(z)\|_{B_2} \ \ \forall\, z \in B_1 \ . \tag{6.7}$$

Se φ è lineare allora la definizione di eqn. (6.6) è equivalente alla definizione di *isometria lineare* vista in eqn. (6.7) (basta porre $z = x - y$). Questo spiega perché entrambi vengono chiamate "isometrie".

Per il teorema di Mazur–Ulam [53] se M_1, M_2 sono spazi vettoriali (su campo reale) dotati di norma e φ è una isometria surgettiva, allora φ è affine (che vuol dire che $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(0)$ è lineare).

Ci chiediamo ora se vi possono essere isometrie che non sono mappe lineari, o più in generale mappe affini.

E6.18 Supponiamo che la sfera $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$ non contenga segmenti: allora ogni funzione che soddisfa (6.6) è necessariamente affine.

E6.19 La condizione che φ sia surgettiva non si può togliere dal Teorema di Mazur-Ulam. Trovate un esempio.

Sugg. Per il punto precedente, la sfera $\{x \in M_2, \|x\|_{M_2} = 1\}$ dovrà contenere segmenti

[53] https://en.wikipedia.org/wiki/Mazur-Ulam_theorem

6.3 Convergenza totale

Definizione 6.20 *Si dice che una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge totalmente quando* $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$

E6.21 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri che se $(f_n)_n, (g_n)_n$ convergono totalmente, allora $(f_n + g_n)_n$ converge totalmente.

E6.22 `Argomenti: convergenza totale. Prerequisiti: E5.10,E5.11,E5.12. Difficoltà: .`
Sia V uno spazio vettoriale dotato di una norma $\|x\|$; dunque V è anche uno spazio metrico con la metrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Mostrate che le due cose seguenti sono equivalenti.

- (V, d) è completo.
- Per ogni successione $(v_n)_n \subset V$ tale che $\sum_n \|v_n\| < \infty$ si ha che la serie $\sum_n v_n$ converge.

(La seconda viene a volte chiamata "criterio di convergenza totale")

6.4 Norme di applicazioni lineari

Siano nel seguito $(X, \|\|_X)$ e $(Y, \|\|_Y)$ spazi normati; sia $A : X \to Y$ un'applicazione lineare; definiamo la **norma indotta** come

$$\|A\|_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in X\,,\,\|x\|_X\le 1} \|Ax\|_Y \ .$$

E6.23 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $\|A\|_{X,Y} < \infty$ se e solo se A è continua.

E6.24 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Notate che se X ha dimensione finita allora ogni applicazione lineare è continua, e

$$\|A\|_{X,Y} = \max_{x\in X\,,\,\|x\|_X\le 1} \|Ax\|_Y \ .$$

E6.25 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio di tutte le applicazioni lineari continue. Mostrate che $\|\cdot\|_{X,Y}$ è una norma in $\mathcal{L}(X, Y)$.

E6.26 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $(Z, \|\|_Z)$ un ulteriore spazio normato, e $B : Y \to Z$ una applicazione lineare. Definiamo similmente $\|B\|_{Y,Z} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y\in Y\,,\,\|y\|_Y\le 1} \|By\|_Z$; mostrate che

$$\|AB\|_{X,Z} \le \|A\|_{X,Y}\|B\|_{Y,Z} \ .$$

6.4.1 Norme di matrici

Siano $p, q \in [1, \infty]$; usiamo nel seguito le norme $|x|_p$ definite in eqn. (6.3).

Definizione 6.27 *Sia* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *una matrice; considerandola come una applicazione lineare fra gli spazi normati* $(\mathbb{R}^n, ||_p)$ *e* $(\mathbb{R}^m, ||_q)$*, definiamo di nuovo la* norma indotta *come*

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathbb{R}^n\,,\,|x|_p\le 1} |Ax|_q \qquad (6.8)$$

(Notate che il massimo è sempre raggiunto in un punto con $|x|_p = 1$*).*
La norma $\|A\|_{2,2}$ *è detta la* norma spettrale.

Definizione 6.28 *Definiamo inoltre le norme*

$$\|A\|_{F-\tilde p} = \begin{cases} \sqrt[\tilde p]{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^{\tilde p}} & \tilde p < \infty \\ \max_{i,j} |A_{i,j}| & \tilde p = \infty \end{cases} ,$$

per $\tilde p \in [1, \infty]$*. Il caso* $\tilde p = 2$ *è detto* norma di Frobenius

E6.29 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.4. Difficoltà: .`
Notate che le norme $\|A\|_{p,q}$ e $\|A\|_{F-\tilde{p}}$ sono tutte equivalenti.

E6.30 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.4. Difficoltà: .`
Consideriamo matrici quadrate, cioè $n = m$ Sappiamo da E6.26 che le norme $\|A\|_{p,q}$ sono submoltiplicative, cioè $\|AB\|_{p,q} \le \|A\|_{p,q}\|A\|_{p,q}$.

Mostrate che anche la norma di Frobenious $\|A\|_{F-2}$ è submoltiplicativa.

Notate che per una norma submoltiplicativa si ha che $\|A^k\| \le \|A\|^k$ per ogni k naturale.

E6.31 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che

$$\|A\|_{1,1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|,$$

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \ .$$

E6.32 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ possiamo definire le norme indotte

$$\|A\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in\mathbb{C}^n\,,\,|x|_p\le 1} |Ax|_q \ . \tag{6.9}$$

Mostrate che $\|A\|_{p,q} = \|\overline{A}\|_{p,q}$.

E6.33 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si ha

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,|x|_2\le 1} |Ax|_2 = \max_{x\in\mathbb{C}^n,|x|_2\le 1} |Ax|_2 \ .$$

6.5 Somma di Minkowski

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 6.34 *Siano $A, B \subseteq X$. Definiamo la **somma di Minkowski** $A \oplus B \subseteq X$ come*

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \ .$$

Nel seguito, dati $A \subseteq X, z \in X$ indicheremo con $A + z = \{b + z : b \in B\}$ la traslazione di A nella direzione z.

E6.35 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che la somma è associativa ed è commutativa; e che la somma ha un unico elemento neutro, che è l'insieme $\{0\}$ costituito dalla sola origine.

E6.36 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A è aperto mostrate che $A \oplus B$ è aperto.

E6.37 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A, B sono compatti mostrate che $A \oplus B$ è compatto.

E6.38 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A è chiuso e B è compatto, mostrate che $A \oplus B$ è chiuso.

E6.39 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate un esempio dove A, B sono chiusi ma $A \oplus B$ non è chiuso.

E6.40 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A, B sono convessi mostrate che $A \oplus B$ è convesso.

Si vedano anche gli esercizi E2.9 e E5.49.

6.6 Morfologia matematica

Sia nel seguito X uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$.

Definizione 6.41 *Siano $A, B \subseteq X$. Ricordiamo la definizione della* somma di Minkowski $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ *vista in 6.34. Fissato un insieme B, definiamo*

- *la **dilatazione** di un insieme $A \subseteq X$ essere $A \oplus B$.*
- *l'**erosione** di un insieme $A \subseteq X$ come*

$$A \ominus B = \{z \in X : (B + z) \subseteq A\}$$

- *la **chiusura** $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$,*
- *l' **apertura** $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$.*

dove dati $B \subseteq X, z \in X$ abbiamo indicato con $B + z = \{b + z : b \in B\}$ la traslazione di B nella direzione z. Nelle precedenti operazioni B è noto come "elemento strutturale", e nelle applicazioni spesso B è un disco o una palla.

Siano nel seguito $A, B, C \subseteq X, w, z \in X$. Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti da [7].

E6.42 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate le seguenti identità:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \bigcup_{y \in B} (A + y) \\ A \ominus B &= \bigcap_{y \in B} (A - y) \end{aligned}$$

E6.43 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.42. Difficoltà: .`
Sia $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$: mostrate che $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \tilde{B}$, dove $A^c = X \setminus A$ è il complementare.

E6.44 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.42. Difficoltà: .`
Mostrate che le quattro operazioni sono monotone: se $A \subseteq C$ allora $A \oplus B \subseteq C \oplus B$, $\quad A \ominus B \subseteq C \ominus B$, $A \bullet B \subseteq C \bullet B$ e $A \circ B \subseteq C \circ B$.

E6.45 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.36,E6.43. Difficoltà: .`
Se A è chiuso mostrate che $A \ominus B$ è chiuso.

E6.46 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che la erosione gode della proprietà invariantiva in questo senso:

$$(A + z) \ominus (B + z) = A \ominus B\,.$$

E6.47 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Moreover, the erosion satisfies $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$

E6.48 Mostrate che la dilatazione gode della proprietà distributiva rispetto all'unione:

$$(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B).$$

E6.49 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.48,E6.43. Difficoltà: .`
Mostrate che la erosione gode della proprietà distributiva rispetto all'intersezione:

$$(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B).$$

E6.50 `Argomenti: . Prerequisiti:` E6.43`. Difficoltà: .`
Sia $\tilde{B} = \{-b : b \in B\}$. Mostrate che

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \tilde{B}) \, .$$

E6.51 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che

$$A \subseteq (C \ominus B)$$

se e solo se

$$(A \oplus B) \subseteq C \ .$$

E6.52 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Ricordiamo che l'operazione $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$ si chiama "chiusura".

- Mostrate che $A \subseteq A \bullet B$.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$, $B = B_r = \{\|x\| < r\}$ una palla, trovate un esempio per cui A è aperto non vuoto limitato e $A \bullet B = A$.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$, $B = B_r$ una palla, trovate un esempio per cui $A \bullet B \neq A$.

E6.53 `Argomenti: . Prerequisiti:` E6.42`. Difficoltà: .`
The opening is also given by $A \circ B = \bigcup_{x \in X, B+x \subseteq A} (B+x)$, which means that it is the locus of translations of the structuring element B inside the set A.

E6.54 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Nel seguito $A, B, \hat{B} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Trovate un esempio dove $B \overset{\neq}{\subset} \hat{B}$ e $A \circ B \overset{\neq}{\subset} A \circ \hat{B}$.
- Trovate un esempio dove $B \overset{\neq}{\subset} \hat{B}$ e $A \circ \hat{B} \overset{\neq}{\subset} A \circ B$.

E6.55 `Argomenti: . Prerequisiti:` E6.53`. Difficoltà: .`
Se A è convesso e $\hat{B}$ è l' inviluppo convesso [54] di B mostrate che $A \circ B \subseteq A \circ \hat{B}$. Mostrate con un esempio che l'uguaglianza potrebbe non valere.

E6.56 `Argomenti: . Prerequisiti:` E6.53`. Difficoltà: .`
Se A, B sono convessi mostrate che $A \circ B$ è convesso.

[54] L'inviluppo convesso di B è l'intersezione di tutti i convessi che contengono B; è dunque il più piccolo convesso che contiene B.

7 Semi continuità, limiti destri e sinistri

7.1 Semi continuità

Sia (X,τ) uno spazio topologico.

Definizione 7.1 *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* semicontinua inferiormente *se*

$$\forall x_0 \in X' \quad , \quad \liminf_{x\to x_0} f(x) \ge f(x_0)$$

e viceversa si dice semicontinua superiormente *se*

$$\forall x_0 \in X' \quad , \quad \limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0)\,.$$

(X' sono i punti di accumulazione in X).

(Abbrevieremo come *s.c.i.* e *s.c.s.*). Si noti che f è *semicontinua inferioriormente* se e solo se $(-f)$ è *semicontinua superiormente*: dunque in molti esercizi successivi vedremo solo i casi *s.c.i.*

E7.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(0) = 0$ e e $f(x) = 1/q$ se $|x| = p/q$ con p, q numeri interi primi tra loro. Mostrare che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e discontinua in ogni $t \in \mathbb{Q}$.

Mostrate che la funzione descritta è s.c.s.

E7.3 `Argomenti: . Prerequisiti: E7.2. Difficoltà: .`
Costruire una funzione monotona con la stessa proprietà di quella vista nell'esercizio E7.2.

E7.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : X \to \mathbb{R}$; le seguenti asserzioni sono equivalenti,

(a) f è *semicontinua inferiormente*,

(b) per ogni t, si ha che il sottolivello

$$S_t = \{x \in X, f(x) \le t\}$$

è chiuso,

(c) l'epigrafico

$$E = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}, f(x) \le t\}$$

è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

Si noti che la seconda condizione comporta che f è continua da (X,τ) in $\mathbb{R}, \tau_+$ dove $\tau_+ = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle semirette, che è una topologia (facile verifica).

Si formuli poi l'equivalente teorema per le funzioni *semicontinue superiormente*.

E7.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono semicontinue inferiormente, allora $f + g$ è s.c.i.

E7.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia I una famiglia di indici, se per $n \in I$ $f_n : X \to \mathbb{R}$ sono s.c.i. , e $f \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in I} f_n$ allora f è s.c.i. (a valori $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). [55].

E7.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Viceversa, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i., si mostri che esiste sempre una successione crescente di $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue t.c. $f_n(x) \to_n f(x)$.

[55] Si noti che questo vale anche quando $n \in I$ famiglia più che numerabile di indici; e vale in particolare quando le f_n sono continue

E7.8 `Argomenti: inf-convoluzione. Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
Nel caso in cui (X, d) sia uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sia s.c.i. limitata dal basso, sia

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in X} \{f(y) + nd(x, y)\}$$

la *inf-convoluzione*: si mostri che la successione f_n è una successione crescente di funzioni Lipschitziane con $f_n(x) \to_n f(x)$.

E7.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Data $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce

$$f^*(x) = f(x) \vee \limsup_{y \to x} f(y)$$

si mostri che $f^*(x)$ è la più piccola funzione semi continua superiore che è maggiore o uguale a f in ogni punto.

Similmente si definisce

$$f_*(x) = f(x) \wedge \liminf_{y \to x} f(y)$$

e si ha $-(f^*) = (-f)_*$, e che dunque $f_*(x)$ è la più grande funzione semi continua inferiore che è minore o uguale a f in ogni punto.

Si noti infine che $f^* \ge f_*$.

E7.10 `Argomenti: oscillazione. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Data una qualunque $f : X \to \mathbb{R}$, si definisce la *funzione oscillazione* $osc(f)$

$$osc(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(x) - f_*(x)$$

(a) si noti che
$$osc(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup\{|f(y) - f(z)|\,,\, d(x, y) < \varepsilon, d(x, z) < \varepsilon\}$$

(b) si noti che $osc(f) \ge 0$, e che f è continua in x se e solo se $osc(f)(x) = 0$,

(c) si mostri che $osc(f)$ è semicontinua superiore.

E7.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Let (X, τ) be a topological space and $f : X \to \mathbb{R}$ a function; let $\overline{x} \in X$ be a point that is not isolated; let eventually U_n be a family of open neighbourhoods of $\overline{x}$ with $U_n \supseteq U_{n+1}$. Then there exists a sequence $(x_n) \subset X$ with $x_n \in U_n$ and $x_n \neq \overline{x}$ and such that

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \liminf_{x \to \overline{x}} f(x) \ .$$

(Note that in general we do not claim neither expect that $x_n \to \overline{x}$).

E7.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Let (X, τ) be a topological space and $f : X \to \mathbb{R}$ a function; let $\overline{x} \in X$ be a point that is not isolated; let A be the set of all the limits $\lim_n f(x_n)$ (when they exist) for all $(x_n) \subset X$ such that $x_n \to \overline{x}$; then

$$\liminf_{x \to \overline{x}} f(x) \le \inf A \ ;$$

moreover if (X, τ) satisfies the first axiom of countability, then equality holds and $\inf A = \min A$.

E7.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f_1 : [0, \infty] \to [0, \infty]$ funzione monotona non crescente e continua a destra. Sia poi $f_2 : [0, \infty) \to [0, \infty]$ data da [56]

$$f_2(s) = \sup\{t \ge 0 : f_1(t) > s\}$$

(con la convenzione che $\sup \emptyset = 0$) e poi ancora $f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty]$ data da

$$f_3(s) = \sup\{t \ge 0 : f_2(t) > s\}$$

allora $f_1 \equiv f_3$.

[56] Sappiamo dagli appunti che anche f_2 è funzione monotona non crescente e continua a destra, perché funzione di ripartizione di f_1 rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^+$. Idem per f_3.

7.2 Funzioni regolate

Definizione 7.14 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$* ***regolate*** *sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro.* [57]

(Si noti in particolare che ogni funzione monotona è regolata, e ogni funzione continua è regolata.)

E7.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:.`
Si mostri che una funzione regolata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata.

E7.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $I = [a, b]$ intervallo chiuso e limitato. Si mostri che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è regolata se e solo se

> $\forall \varepsilon > 0$ *esiste un insieme finito di punti $P \subset I$ tale che, per ogni (a, b) intervallo aperto che è una componente connessa di $I \setminus (P \cup \{a, b\})$, si ha che l'oscillazione di f in (a, b) è minore di ε.*

E7.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia V l'insieme delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ costanti a tratti, che è lo spazio vettoriale generato dalle indicatrici degli intervalli. Si mostri che la chiusura di V secondo la convergenza uniforme coincide con lo spazio delle funzioni regolate.

Dunque lo spazio delle funzioni regolate dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach.

Si vedano anche gli esercizi E10.7, E10.8, E10.9 e E12.4.

7.3 Trasformata di sup

Sia $I = \mathbb{R}^+$ oppure $I = \mathbb{R}$ nel seguito, per semplicità

Sia $\varepsilon > 0$; data $f : I \to \mathbb{R}$ limitata[58] , definiamo la "*trasformata sup*" come la funzione $g : I \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) = \sup_{y \in (x, x+\varepsilon)} f(y) \ . \tag{7.1}$$

Riassumiamo questa trasformazione con la notazione $g = F(\varepsilon, f)$.

E7.18 Mostrate che g è regolata.

E7.19 Mostrate che g è semi continua inferiore.

E7.20 Mostrate che $f = g$ se e solo se f è monotona debolmente decrescente e continua a destra.

E7.21 Data

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x = 4 \\ 0 & x \neq 4 \end{cases}$$

trovate f tale che $g = F(1, f)$.

E7.22 Mostrate che se f è continua allora g è continua.

E7.23 Sia C_b lo spazio delle funzioni $C^0(I)$ continue e limitate. Questo è uno spazio normato completo con la norma $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$.

Consideriamo la mappa $F : [0, \infty) \times C_b \to C_b$ che trasforma $g = F(\varepsilon, f)$ come definito nella eqn. (7.1).

Mostrate che F è continua.

E7.24 Come cambiano i precedenti esercizi se si definisce invece

$$g(x) = \sup_{y \in [x, x+\varepsilon]} f(y) \ ? \tag{7.2}$$

[57] Negli estremi ovviamente si richiede uno solo dei due limiti.
[58] L'ipotesi "limitata" è di comodo, i risultati successivi valgono anche senza questa ipotesi, con semplici modifiche.

8 Continuità

E8.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che è limitata dall'alto [59] se e solo se $\limsup_{x\to 0+} f(x) < +\infty$.

E8.2 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.70. Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si mostri che il numero di punti di discontinuità eliminabile (cioè i punti z per cui esiste $\lim_{x\to z} f(x) \neq f(z)$) sono al più numerabili.

E8.3 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.70. Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si mostri che il numero di punti di discontinuità del secondo tipo (cioè i punti z dove esistono i limiti laterali ma $\lim_{x\to z+} f(x) \neq \lim_{x\to z-} f(x)$) sono al più numerabili.

E8.4 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.59. Difficoltà: ⋆.`
Sia $C \subset \mathbb{R}$ chiuso e sia $f : C \to \mathbb{R}$ continua; mostrate che esiste sempre $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua che estende f, cioè $g_{|_C} = f$.

E8.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆⋆.`
Trovate una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non è monotona in nessun intervallo (aperto nonvuoto).

E8.6 `Argomenti: . Prerequisiti: integrale di Riemann. Difficoltà: .`
Data $f = f(x,y) : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e posto

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

mostrare che g è continua.

E8.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Data $f = f(x,y) : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e posto

$$g(x) = \max_{y\in[0,1]} f(x,y)$$

mostrare che g è continua.

E8.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano x_n, y_n successioni strettamente positive con limite zero; esiste una funzione continua e monotona $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tale che $f(0) = 0$ e $\forall x > 0, f(x) > 0$ e tale che $\forall n, f(x_n) < y_n$.

E8.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dimostrare che se una funzione monotona è definita su un sottoinsieme denso di un intervallo aperto I, e ha immagine densa in un altro intervallo aperto J, allora si prolunga per continuità a una funzione continua monotona tra i due intervalli I, J aperti.

(Cosa succede se I è chiuso ma J è aperto?)

E8.10 `Argomenti: . Prerequisiti: categorie di Baire Sec. 5.9. Difficoltà: ⋆⋆.`
Si mostri che non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua sui razionali e discontinua sugli irrazionali. *(Sugg. Si mostri che gli irrazionali non sono un F_σ in $\mathbb{R}$, usando il teorema di Baire.)*

8.1 Funzioni uniformemente continue

Definizione 8.11 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione; f è detta **uniformemente continua** se*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ .$$

*Più in generale, dati (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici e $f : X_1 \to X_2$, f è detta **uniformemente continua** se*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X_1,\ d_1(x,y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\ .$$

Si vede facilmente che una funzione *uniformemente continua* è continua in ogni punto.

E8.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : X_1 \to X_2$ con (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. *(Svolto il 13 Mar ◊)*

Una funzione $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ monotona (debolmente) crescente, con $\omega(0) = 0$ e $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1,\ d_2(f(x), f(y)) \le \omega(d_1(x,y)) , \tag{8.1}$$

è detta **modulo di continuità** per la funzione f.

Vedremo ora che l'esistenza di un modulo di continuità è equivalente alla uniforme continuità di f. (Notate che f può avere molti moduli di continuità).

- Se f è uniformemente continua mostrate che la funzione
$$\omega(t) = \sup\{d_2(f(x), f(y)) \,:\, x, y \in X_1, d_1(x,y) \le t\} \tag{8.2}$$
è il più piccolo modulo di continuità.[60]
- Notate che il modulo definito in (8.2) potrebbe non essere continuo, e potrebbe essere infinito per t grande — trovate esempi a riguardo.
- Mostrate inoltre che se f è uniformemente continua si può trovare un modulo che è continuo dove è finito.
- Viceversa è facile vericare che se f ha un modulo di continuità allora è uniformemente continua.

Se non conoscete la teoria degli spazi metrici, potete dimostrare i precedenti risultati nel caso in cui $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$. (Si veda anche l'esercizio E8.20 che mostra che in questo caso il modulo ω definito in (8.2) è continuo ed è finito).

E8.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia (X, d) spazio metrico, sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continue, si mostri che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale. *(Svolto il 13 Mar ◊)*

Questo vale più in generale se $f : X \to X_2$ dove X_2 è uno spazio vettoriale normato (a cui associamo la distanza derivata dalla norma).

E8.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`

`Note:`*Prop. 5.56 degli appunti 2016/17.*

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici, con (X_2, d_2) completo. Sia $A \subset X_1$ e $f : A \to X_2$ una funzione uniformemente continua. Si mostri che esiste una funzione uniformemente continua $g : \overline{A} \to X_2$ che estende f; inoltre la estensione g è unica.

Si noti che se ω è un modulo di continuità per f allora è anche un modulo di continuità per g. (Sia assuma che ω sia continuo, o almeno che sia semi continuo superiore).

E8.15 `Argomenti: . Prerequisiti: E8.14. Difficoltà: ⋆.`

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che f è uniformemente continua se e solo esiste una funzione continua $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ che estende f; inoltre la estensione g è unica.

E8.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che è uniformemente continua se e solo se esiste finito il limite $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *(Svolto il 13 Mar ◊)*

E8.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che esiste finito il limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Si mostri che è uniformemente continua.

E8.18 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si mostri che queste due cose sono equivalenti. *(Proposto il 13 Mar)*

- Esiste $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e tale che esiste finito il limite $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$.
- f è uniformemente continua.

E8.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si trovi un esempio di $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua e limitata ma non uniformemente continua. *(Svolto il 13 Mar ◊)*

[59] cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in (0, 1]$ si ha $f(x) < c$

[60] Notate che la famiglia su cui si calcola l'estremo superiore contiene sempre i casi $x = y$, dunque $\omega(t) \ge 0$.

E8.20 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Sia il modulo di continuità ω definito tramite la eqn. (8.2) come nell'esercizio E8.12. Si mostri che ω è subadditiva cioè

$$\omega(t) + \omega(s) \geq \omega(t+s) \quad .$$

Sapendo che $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$ se ne conclude che ω è continua.

E8.21 `Argomenti: . Prerequisiti: E8.20. Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua; si mostri che

$$\limsup_{x\to\pm\infty} |f(x)|/x < \infty$$

o equivalentemente che esiste una costante C tale che $|f(x)| \leq C(1+|x|)$ per ogni x.

E8.22 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.26. Difficoltà: .`
Siano (X_1, d_1), (X_2, d_2) e (Y, δ) tre spazi metrici; consideriamo il prodotto $X = X_1 \times X_2$ dotato della distanza $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. [61] Sia $f : X \to Y$ una funzione con le seguenti proprietà:

- Per ogni fissato $x_1 \in X_1$ la funzione $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è continua (come funzione da X_2 a Y);
- esiste un modulo di continuità ω tale che

$$\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_2 \ , \ \forall x_2 \in X_2 \ , \delta(f(x_1, x_2), f(\tilde{x}_1, x_2)) \leq \omega(d_1(x_1, \tilde{x}_1))$$

(potremmo definire questa proprietà dicendo che la funzione $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ è uniformente continua indipendentemente dalla scelta di x_2).

Si mostri allora che f è continua.

Si veda anche il punto $\mathcal{F}_{iii}$) dell'esercizio E12.4.

8.1.1 Funzioni Lipschitziane & Hölderiane

Definizione 8.23 *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **Lipschitziana** se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, y \in A$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \ .$$

*Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **Hölderiana** se esistono $L > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$ tale che $\forall x, y \in A$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \ .$$

Come nel caso della "uniforme continuità", questa nozione si estende alle mappe fra spazi metrici.

E8.24 `Argomenti: . Prerequisiti: E8.12. Difficoltà: .`
Mostrate che le funzioni Lipschitziane & Hölderiane sono uniformemente continue; che cosa si può dire del loro modulo di continuità? *(Svolto il 13 Mar ◊)*

E8.25 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Si mostri che f' è limitata su I se e solo se f è Lipschitziana.

E8.26 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che esiste $\alpha > 1$ con $\forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ (cioè f è Hölderiana di ordine $\alpha > 1$): si mostri che f è costante.

E8.27 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una decomposizione di $[a, b]$ in intervallini $I_1 = [a, t_1], I_2 = [t_1, t_2], \ldots, I_n = [t_{n-1}, b]$ tale che la restrizione di f su ciascun I_k è Lipschitziana di costante C. Si mostri che f è Lipschitziana di costante C.

Similmente con le funzioni Hölderiane.

[61] Sappiamo da E6.4 e E5.26 che vi sono diverse possibili scelte di distanze, che però sono fra loro equivalenti.

E8.28 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Hölderiana con esponente $\alpha \leq 1$. Si mostri che f è Hölderiana con esponente β per ogni $\beta < \alpha$.

Si noti che questo non è tecnicamente vero per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

E8.29 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si costruisca $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua ma non Hölderiana. *(Proposto il 13 Mar ◊)*

E8.30 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare è Lipschitziana.

E8.31 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Per ognuna delle seguenti funzioni, dire se è continua, uniformemente continua, Hölderiane (e con quale esponente), o Lipschitziana. *(Proposto il 13 Mar ◊)*

- $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$.
- $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.
- $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)/x$
- $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\beta$ con $\beta > 0$.
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^\beta)$ con $\beta > 0$.

E8.32 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dato $L \in (0, 1)$ se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa *(Proposto il 13 Mar ◊)*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

allora esiste un unico “punto fisso” cioè un punto x per cui $f(x) = x$.

E8.33 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che *(Proposto il 13 Mar ◊)*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ma per cui non esiste un “punto fisso” cioè un punto x per cui $f(x) = x$.

8.2 Funzioni discontinue

Sia nel seguito (X, d) uno spazio metrico. Un insieme E si dice un F_σ se è unione numerabile di chiusi. Si riveda l’esercizio E5.33.

E8.34 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Notate che ogni insieme aperto $A \subset X$ nonvuoto è un F_σ. *(Sugg. usate E5.48).*

E8.35 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Data una generica $f : X \to \mathbb{R}$, si mostri che l’insieme E dei punti dove f è discontinua è un F_σ.

E8.36 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`

Supponiamo che (X, d) ammetta un sottoinsieme D che è denso ma ha parte interna vuota. [62]

Dato un $E \subset X$ che è un F_σ, si costruisca una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ per cui E è l’insieme dei punti di discontinuità.

[62] Cioè, sia D che il complementare sono densi. $X = \mathbb{R}$ soddisfa tale requisito, prendendo ad esempio $D = \mathbb{Q}$.

9 Funzioni e insiemi convessi

9.1 Insiemi convessi

Definizione 9.1 *Dati* $x_1, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$ *, dati* $t_1, \dots t_k \geq 0$ *con* $t_1 + \dots + t_k = 1$*, la somma*

$$x_1 t_1 + \dots + x_k t_k$$

è una combinazione convessa *dei punti* $x_1, \dots x_k$.

Se $k = 2$ allora la combinazione convessa si scrive usualmente come $(tx + (1-t)y)$ con $t \in [0,1]$; l'insieme di tutti questi punti è il segmento che collega x, y.

Definizione 9.2 *Sia* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme; si dice* convesso *se*

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x, y \in C,\ (tx + (1-t)y) \in C$$

cioè se il segmento che collega ogni $x, y \in C$ *è tutto compreso in* C.

(Notiamo che $\emptyset$ è un convesso, e che ogni sottospazio vettoriale o affine di $\mathbb{R}^n$ è convesso).

Gli insiemi convessi godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

Topologia

E9.3 `Argomenti: simplesso. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dati $x_0, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$, sia

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} x_i t_i : \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \forall i, t_i \geq 0 \right\} \tag{9.1}$$

l'insieme di tutte le possibili combinazioni, provare che questo insieme è convesso.

Quando i vettori $x_1 - x_0, x_2 - x_0 \dots x_k - x_0$ sono linearmente indipendenti, l'insieme sopra definito è un *simplesso* di dimensione k.

Si mostri che se $n = k$ allora il simplesso ha parte interna non vuota e uguale a

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i t_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \forall i, t_i > 0 \right\} \tag{9.2}$$

E9.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso contenente almeno due punti, sia V il più piccolo spazio affine che contiene A (si mostri che questo concetto è ben definito); e, visto A come sottoinsieme di V, si mostri che A ha parte interna non vuota.

E9.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $y \in \partial A$, allora il segmento che li collega è contenuto in A°, salvo l'estremo y (cioè $\forall t \in (0,1), ty + (1-t)x \in A^\circ$).

E9.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si mostri che la sua apertura e la sua chiusura sono ancora convessi.

E9.7 `Argomenti: . Prerequisiti: E5.32,E9.5. Difficoltà: .`

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso con parte interna nonvuota, si mostri che $\overline{A} = \overline{(A^\circ)}$ (la chiusura della parte interna di A). Trovate poi un semplice esempio di A per cui $\overline{A} \neq \overline{(A^\circ)}$.

E9.8 `Argomenti: . Prerequisiti: E4.10. Difficoltà: ⋆.`

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si mostri che $A^\circ = \left(\overline{A}\right)^\circ$ (la parte interna della chiusura di A).

`Note:`*Usando E9.11 si mostra facilmente che* $A^\circ \supseteq \overline{A}^\circ$*; solo che questo risultato fa comodo in una delle possibili dimostrazioni di E9.11 (!); una dimostrazione alternativa usa i simplessi come intorni*, cf *E9.3.*.

Si veda anche l'esercizio E6.40, E6.55 e E6.56.

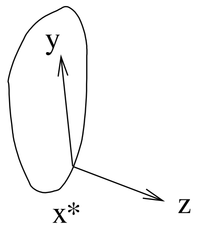
9.1.1 Proiezione, separazione

E9.9 `Argomenti: proiezione. Prerequisiti: . Difficoltà:` $\star$.

`Note:`*Questo è il noto "teorema della proiezione", che vale per A convesso chiuso in uno spazio di Hilbert; se $A \subset \mathbb{R}^n$ allora la dimostrazione è più semplice, e è un utile esercizio..*

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso convesso nonvuoto e $z \in \mathbb{R}^n$, si mostri che esiste un unico punto di minimo x^* per il problema

$$\min_{x \in A} |z - x| \,.$$



Si mostri che x^* è il minimo se e solo se

$$\forall y \in A, \langle z - x^*, y - x^* \rangle \le 0 \,.$$

x^* è chiamato "la proiezione di z su A".

E9.10 `Argomenti: separazione. Prerequisiti: E9.9. Difficoltà: .`

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso convesso nonvuoto e $z \notin A$, sia x^* come nell'esercizio precedente E9.9, e $\delta = |z - x^*|$, $v = (z - x^*)/\delta$ e $a = \langle v, x^* \rangle$, si dimostri che v, a e $v, a + \delta$ definiscono due iperpiani paralleli che separano fortemente z da A, nel senso che $\langle z, v \rangle = a + \delta$ ma $\forall x \in A, \langle x, v \rangle \le a$.

E9.11 `Argomenti: separazione. Prerequisiti: . Difficoltà:` $\star\star$.

`Note:`*Questo risultato vale in contesti molto generali, ed è una conseguenza del "teorema di Hahn–Banach" (che fa uso del Lemma di Zorn); se $A \subset \mathbb{R}^n$ si può però dimostrare in modo elementare, vi invito a provarci..*

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso nonvuoto e $z \notin A$, si mostri che esiste un iperpiano che separa z da A, cioè esistono $a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tali che $\langle z, v \rangle = a$ ma $\forall x \in A, \langle x, v \rangle < a$. L'iperpiano così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A.

`Note:`*Vi sono (almeno) due dimostrazioni possibili. Una possibile dimostrazione si fa per induzione su n; potete assumere senza perdita di generalità che $z = e_1 = (1, 0 \ldots 0), 0 \in A, a = 1$; tenete presente che l'intersezione di un convesso aperto con $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ è un convesso aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$; questa dimostrazione è complessa ma non usa nessun prerequisito. Una seconda dimostrazione usa E9.6 e E9.10 se $z \notin \partial A$; se $z \in \partial A$ usa anche E9.7 per trovare $(z_n) \subset (A^c)^\circ$ con $z_n \to z$..*

E9.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se A, B sono convessi disgiunti, con A aperto, mostrate che esiste un iperpiano che separa A e B, cioè esistono $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in A, \langle x, v \rangle < c \text{ ma } \forall y \in B, \langle y, v \rangle \ge c \,; \tag{9.3}$$

mostrate inoltre che se anche B è aperto, allora si può avere separazione stretta (cioè disuguaglianza stretta nell'ultimo termine in (9.3)). (Suggerimento: dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ convessi nonvuoti, si mostri che

$$A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x - y, x \in A, y \in B\}$$

è convesso; si mostri che se A è aperto allora $A - B$ è aperto)

E9.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate un esempio di $A, B \subset \mathbb{R}^2$ convessi aperti con $\overline{A}, \overline{B}$ disgiunti, e tali che vi è un unico iperpiano che li separa (cioè una "unica" scelta di v, c che soddisfa (9.3); "unica", a meno di moltiplicare v, c per una stessa costante positiva).

E9.14 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.11. Difficoltà: .`

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso, $x \in A^\circ$ e $y \in \partial A$, allora la retta che li collega, proseguendo oltre y, rimane fuori da $\overline{A}$ (cioè $\forall t > 1, ty + (1 - t)x \notin \overline{A}$).

E9.15 `Argomenti: separazione,supporto. Prerequisiti: E9.4,E9.11,E9.8. Difficoltà: .`

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso nonvuoto e $z \in \partial A$, si dimostri che esistono v, a tali che $\langle z, v \rangle = a$ e $\forall x \in A, \langle x, v \rangle \le a$. L'iperpiano così definito è detto *iperpiano di supporto* di z per A.

E9.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà:` $\star$.

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ convesso limitato aperto nonvuoto, mostrate che ∂A è sostegno di un arco semplice chiuso (e anche Lipschitz).

Diamo per buoni i risultati di separazione visti prima: per ogni $x \in \partial A$ esiste una retta r che passa per x e non interseca A; questa retta divide $\mathbb{R}^2$ in due semipiani aperti, uno dei quali contiene A.

9.2 Funzione convessa

Definizione 9.17 *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice* convessa *se*

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x, y \in C,\ f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

f si dice strettamente convessa *se inoltre*

$$\forall t \in (0,1),\ \forall x, y \in C, x \ne y,\ f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

Definizione 9.18 *f si dice (strettamente) concava se $-f$ è (strettamente) convessa.*

Le funzioni convesse godono di tantissime proprietà interessanti, questa che segue è solo una piccola lista.

...definizioni equivalenti

E9.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa e siano $x_1, \ldots, x_n \in C$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tali che $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Si mostri che

$$\sum_{i=1}^n t_i x_i \in C$$

e

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

E9.20 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : C \to \mathbb{R}$, si mostri che è convessa, se e solo se l'epigrafico

$$\{(x,y) \,|\, x \in C\,,\ f(x) \le y\}$$

è un sottoinsieme convesso di $C \times \mathbb{R}$.

Proprietà

Questa che segue è una lista di proprietà per funzioni convesse $f : C \to \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Ovviamente queste proprietà valgono anche quando $n = 1$; ma quando $n = 1$ le dimostrazioni sono in genere più facili, si veda la sezione successiva.

E9.21 `Argomenti: minimi. Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Mostrate che i punti di minimo di f sono un insieme convesso (possibilmente vuoto). Mostrate che se f è strettamente convessa vi può essere al più un punto di minimo.

E9.22 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso; siano $f_i : C \to \mathbb{R}$ convesse, dove $i \in I$ (una famiglia non vuota, e arbitraria, di indici), e definiamo $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$, dove supponiamo (per semplicità) che $f(x) < \infty$ per ogni i: si mostri che f è convessa.

E9.23 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.20,E9.15. Difficoltà: ⋆.`
Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, e $z \in C^\circ$: si mostri che esiste $v \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\forall x \in C, f(x) \ge f(z) + \langle v, x - z\rangle\ . \tag{9.4}$$

Il piano così definito è detto *piano di supporto* per f in z.

`Note:`*È preferibile non assumere che f sia continua nel dimostrare questo risultato, in quanto questo risultato si usa in genere per dimostrare che f è continua!.*

E9.24 `Argomenti: . Prerequisiti: 6.5,E6.4,E9.23. Difficoltà: ⋆.`
Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, si mostri che f è continua.

`Note:`*Nel caso di dimensione $n = 1$, la dimostrazione è molto più facile, si veda E9.32.*

E9.25 `Argomenti: sottodifferenziale. Prerequisiti: E9.23. Difficoltà: ⋆.`

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso aperto, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa; dato $z \in C$, si definisce il *sottodifferenziale* $\partial f(z)$ come l'insieme dei v per cui (9.4) vale (cioè, $\partial f(z)$ rappresenta i piani di supporto a f in z). $\partial f(z)$ gode di interessanti proprietà.

- $\partial f(z)$ è localmente limitato: se $z \in C$ e $r > 0$ è tale che $B(z, 2r) \subset C$ allora esiste $L > 0$ tale che $\forall y \in B(z, r)$, $\forall v \in \partial f(x)$ si ha $|v| \le L$. In particolare, per ogni $z \in C$ si ha che $\partial f(z)$ è un insieme limitato.
- Mostrate che ∂f è *continua superiormente* in questo senso: se $z \in C$ e $(z_n)_n \subset C$ e $v_n \in \partial f(z_n)$ e se $z_n \to_n z$ e $v_n \to_n v$ allora $v \in \partial f(z)$. In particolare, per ogni $z \in C$, $\partial f(z)$ è un insieme chiuso.

E9.26 `Argomenti: minimi. Prerequisiti: E9.25. Difficoltà: .`

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Mostrate che $z \in C^\circ$ è un minimo se e solo se $0 \in \partial f(z)$.

E9.27 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.23,E9.25. Difficoltà: .`

`Note:`*Un viceversa del E9.22.*

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso aperto; sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa; esistono $(a_h)_h \subseteq \mathbb{R}$, $(v_h)_h \in \mathbb{R}^n$ per $h \in \mathbb{N}$, tali che $f(x) = \sup_{h\in\mathbb{N}}(a_h + v_h \cdot x)$.

9.3 Caso reale

Sia $I \subset \mathbb{R}$, allora I è convesso se e solo è un intervallo (si veda E5.56). Nel seguito considereremo $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I = (a, b)$ è un intervallo aperto.

E9.28 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si mostri che $f(x)$ è convessa se e solo se la mappa $R(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ è monotona debolmente crescente in x. [63] Inoltre f è strettamente convessa se e solo se R è strettamente crescente.

E9.29 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si mostri che per una funzione convessa $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ vi sono solo tre possibilità:

- f è monotona strettamente crescente
- f è monotona strettamente decrescente
- vi sono due valori $l_- \le l_+$ tale che f è monotona strettamente crescente in $[l_+, b)$, f è monotona strettamente decrescente in $(a, l_-]$, e l'intervallo $[l_-, l_+]$ sono tutti i punti di minimo di f;

se inoltre f è strettamente convessa allora vi è al più un solo punto di minimo.

E9.30 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. Si mostri che per ogni intervallo chiuso $I \subset (a, b)$ esiste una costante C tale che $f|_I$ risulta C-Lipschitziana. Si mostri un esempio di funzione continua e convessa definita su un intervallo chiuso che non è Lipschitziana.

E9.31 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si mostri che una funzione continua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa se e soltanto se per ogni $u, v \in (a, b)$ si ha

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

9.3.1 Convessità e derivate

E9.32 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.28. Difficoltà: .`

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa.

(a) Si mostri che in ogni punto esistono la derivata destra $d^+(x)$ e sinistra $d^-(x)$ (In particolare f è continua).

[63] Si noti che $R(x, y)$ è simmetrica.

(b) Si mostri che $d^-(x) \le d^+(x)$,

(c) mentre per $x < y$ si ha $d^+(x) \le R(x,y) \le d^-(y)$.

(d) Si deduca che $d^+(x)$ e $d^-(x)$ sono monotone debolmente crescenti.

(e) Si mostri che $d^+(x)$ è continua a destra, mentre $d^-(x)$ è continua a sinistra.

(f) Inoltre si mostri che $\lim_{s\to x-} d^+(s) = d^-(x)$ mentre $\lim_{s\to x+} d^-(s) = d^+(x)$. In particolare d^+ è continua in x se e solo se d^- è continua in x se e solo se $d^-(x) = d^+(x)$.

Dunque d^+, d^- sono, per così dire, la stessa funzione monotona, solo che nei punti di discontinuità d^+ assume il valore dei limiti destri mentre d^- il valore dei limiti sinistri.

(g) Usate il precedente per mostrare che f è derivabile in x se e solo se d^+ è continua in x, se e solo se d^- è continua in x.

(h) Si mostri dunque che f è derivabile salvo che in un numero numerabile di punti.

E9.33 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.28. Difficoltà: .`
Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è convessa se e solo se f' è debolmente crescente.

E9.34 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.28,E9.33. Difficoltà: .`
Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è strettamente convessa se e solo se f' è strettamente crescente.

E9.35 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.28, E9.33. Difficoltà: .`
Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte, allora f è convessa se e solo se $f'' \ge 0$ in ogni punto.

E9.36 `Argomenti: . Prerequisiti: E9.35. Difficoltà: .`
`Note:`*riadattati dal compitino 9 apr 2011.*
Sia $J \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto, e $f : J \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e convessa. Si mostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

(a) f è strettamente convessa,

(b) l'insieme $\{x \in J : f''(x) = 0\}$ ha parte interna vuota,

(c) f' è monotona strettamente crescente.

Si veda anche l' esercizio E10.13 per il rapporto fra integrale e convessità.

9.3.2 Funzioni convesse a valori estesi

Consideriamo funzioni convesse che possono anche assumere valore $+\infty$. Sia I un intervallo.

E9.37 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convessa, si mostri che $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ è un intervallo.

E9.38 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*un altro viceversa del E9.22.*
Data $f : I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convessa e semicontinua inferiore, esistono $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = \sup_n (a_n + b_n x)$.

9.4 Ulteriori proprietà e esercizi

E9.39 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $r \in \mathbb{R}$ allora $\{x, f(x) < r\}$ e $\{x, f(x) \le r\}$ sono insiemi convessi (eventualmente vuoti).

E9.40 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un convesso, e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e monotona non-decrescente: si provi che $f \circ g$ è convessa.

E9.41 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ concava e $f(0) = 0$ e f continua in zero.

- Si provi che f è *subadditiva*, cioè
$$f(t) + f(s) \geq f(t + s)$$
per ogni $t, s \geq 0$. Se inoltre f è strettamente concava e $t > 0$ allora
$$f(t) + f(s) > f(t + s)\,.$$
- Si provi che se $\forall x, f(x) \geq 0$ allora f è monotona debolmente decrescente.
- Il viceversa? Trovate un esempio di $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ con $f(0) = 0$, continua e monotona crescente e subadditiva, ma non concava.

E9.42 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si mostri la disuguaglianza di Young: dati $a, b > 0$, $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ allora *(Svolto il 20 feb)*
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{9.5}$$
con uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$; usando la concavità del logaritmo.

Si veda anche E19.15.

E9.43 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $\alpha \in (0, 1)$, si mostri che x^α è α-Hölderiana (possibilmente usando i risultati precedenti)

Si veda anche l'esercizio E10.26.

9.4.1 Funzione distanza

E9.44 `Argomenti: funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti: E5.48,E9.39. Difficoltà: .`
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso nonvuoto, sia d_A la *funzione distanza* definita nell' esercizio E5.48, cioè $d_A(x) = \inf_{y\in A} |x - y|$. Si mostri che A è un'insieme convesso se e solo se d_A è una funzione convessa.

E9.45 `Argomenti: funzione distanza, insiemi convessi. Prerequisiti: E5.48,E9.9. Difficoltà: .`
Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso chiuso, si definisce la *funzione distanza* $d_A(x)$ come sopra; sia $z \notin A$ e x^* la proiezione di z su A (cioè il punto di minima distanza nella definizione di $d_A(z)$); posto $v = (z-x^*)/|z-x^*|$ si mostri che $v \in \partial f(z)$; dove ∂f è il *sottodifferenziale* definito in E9.25.

10 Integrale di Riemann

E10.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia p un polinomio (con coefficienti complessi); sia $\theta \in \mathbb{C}, \theta \neq 0$. Sia $f(x) = -\int_0^x e^{-\theta t} p(t)\,\mathrm{d}t$. Si mostri che $f(x) = e^{-\theta x} q(x) - q(0)$ dove q è un polinomio che ha lo stesso grado di p. Si determini la mappa lineare (cioè la matrice) che trasforma i coefficienti di p nei coefficienti di q.

E10.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Simile al punto $\mathcal{F}_{viii}$) dall'esercizio E12.4.*
Supponiamo che $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ siano Riemann integrabili. *(Svolto il 31 mag)*

Trovate un esempio in cui $f_n \to_n f$ puntualmente ma f non è Riemann integrabile.

Mostrate che se la convergenza è uniforme allora f è Riemann integrabile e $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \mathrm{d}x = \int_a^b f \mathrm{d}x$.

E10.3 `Argomenti: . Prerequisiti: E10.2, E12.1. Difficoltà: .`
Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo con estremi a, b, e $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ continue non negative tali che $f_n(x) \nearrow_n f$ puntualmente (cioè per ogni x e n si ha $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$); si mostri allora *(Svolto il 31 mag)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

(Nota se l'intervallo è aperto o semiaperto o illimitato allora gli integrali di Riemann si intendono in senso generalizzato; in questo caso il membro destro può anche valere $+\infty$).

Il precedente risultato prende il nome di *Teorema di Convergenza Monotona* e vale in ipotesi molto generali; nel caso di integrali di Riemann si può però vedere come conseguenza dei risultati E10.2, E12.1.

E10.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mostrate che $g \circ f$ è Riemann integrabile.

E10.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:.`
Dire quali di queste funzioni $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili:

(a) l'indicatrice dell'insieme di Cantor

(b) $f(0) = 0$, $f(x) = \sin(1/x)$

(c) $f(0) = 0$ e
$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2 + |\sin(1/x)|}$$

(d) $f(x) = 0$ se x è irrazionale, $f(x) = \cos(1/m)$ se $x = n/m$ con n, m primi fra loro.

(e) $f(x) = 0$ se x è irrazionale, $f(x) = \sin(1/m)$ se $x = n/m$ con n, m primi fra loro.

E10.6 `Argomenti: . Prerequisiti: teorema fondamentale del calcolo integrale. Difficoltà: .`
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, mostrate che

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

E10.7 `Argomenti: . Prerequisiti: funzioni regolate Sec. 7.2. Difficoltà: .`
Si mostri che una funzione $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ regolata è Riemann integrabile.

E10.8 `Argomenti: . Prerequisiti: funzioni regolate Sec. 7.2. Difficoltà: .`
Si trovi una funzione Riemann integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non è regolata.

E10.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Vi può essere una funzione Riemann integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non è regolata in nessun punto?

E10.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se $f, g : [A, B] \to \mathbb{R}$ sono Riemann integrabili, allora $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è Riemann integrabile.

E10.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si trovi una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiore, limitata, ma non Riemann integrabile.

E10.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Definiamo la funzione Beta come

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,.$$

(a) Mostrate che l'integrale esiste (finito) se e solo se $x, y > 0$.

(b) Notate che $B(x,y) = B(y,x)$

(c) Mettete in relazione $B(n,m)$ con $B(n-1,m+1)$. Calcolate dunque il valore di $B(n,m)$ per n,m naturali positivi.

(d) Usate il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)^9 \cos(t)^7\,dt\ .$$

E10.13 `Argomenti: . Prerequisiti: funzioni convesse. Difficoltà: .`

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e $x_0 \in I$. Si dimostri che queste due cose sono equivalenti:

(a) $F : I \to \mathbb{R}$ è convessa.

(b) esiste $f : I \to \mathbb{R}$ monotona (debolmente) crescente e tale che $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s$,

e si verifichi che si può scegliere f essere la derivata destra (o sinistra) di F.

E10.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:.`

Si esibisca una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile tale che la derivata della funzione $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ non è f.

E10.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*giaquinta modica pag. 162 e seguenti,.*

Si calcolino esplicitamente formule primitive per

$$\frac{1}{\sin(x)^2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ \frac{1}{2+\sin(x)}$$

E10.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:.`

Definiamo la funzione Gamma come

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

- Mostrate che $\Gamma(x)$ è ben definita per $x > 0$ reale.
- Mostrate che $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e deducete che $\Gamma(n+1) = n!$.
- Mostrate che $\Gamma(x)$ è analitica.
  (Potete dare per buono che le derivate di Γ sono $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^n t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$; si ottengono per derivazione sotto segno di integrale.)

E10.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Calcolate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

vedendolo come una somma approssimante di un integrale di Riemann.

E10.18 Argomenti: . Prerequisiti: E11.39.Difficoltà: .

Sia $a \in \mathbb{R}$, sia I intervallo aperto con $a \in I$, sia $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ continua. Definiamo ricorsivamente $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ per $n \geq 1$ tramite $\varphi_n(x) = \int_a^x \varphi_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$; si mostri che *(Svolto il 8 mag)*

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t \tag{10.1}$$

E10.19 Argomenti: . Prerequisiti: E10.18. Difficoltà: .

Note:*pg 334 Apostol; Teo. 6.34 appunti 2017/18.*

Sia $a \in \mathbb{R}$, sia I intervallo aperto con $a \in I$; supponendo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia di classe C^{n+1}, mostrate la **formula di Taylor con resto integrale** *(Svolto il 8 mag)*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

E10.20 Argomenti: . Prerequisiti: E9.28, E10.13. Difficoltà: .

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $g : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato e contenuto in I. Presi $x \neq y$ sia

$$R(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s$$

(con la usuale convenzione che $\int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s = -\int_y^x g(s)\,\mathrm{d}s$, in modo che $R(x,y) = R(y,x)$). Se g è monotona si mostri che $R(x,y)$ è monotona in ciascuna variabile. Se g è continua e $R(x,y)$ è monotona in ciascuna variabile si mostri che g è monotona.

E10.21 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .

Note:.

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

per ogni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua: mostrate allora che $f \equiv 0$.

E10.22 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .

Note:.

Torniamo all'esercizio E3.24: eseguendo formalmente il prodotto di Cauchy della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ con se stessa, si ottiene la serie $\sum_n (-1)^n c_n$ con $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$; mostrate che $c_n \to \pi$.

E10.23 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: $\star$.

Note:.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata, mostrate che

$$\lim_{y\to 0+} \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = f(0)$$

(Sugg. si cominci dal caso f costante.)

E10.24 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .

Note:.

Siano $n, m \geq 1$ interi, e

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (\log x)^m\,\mathrm{d}x$$

ponete in relazione $I_{n,m}$ con $I_{n,m-1}$; usate la relazione per calcolare esplicitamente

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n\,\mathrm{d}x\,.$$

E10.25 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:⋆⋆.`

Mostrate le identità

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \qquad (= 1.291285997\dots) \tag{10.2}$$

$$\int_0^1 x^{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n} \qquad (= 0.783430510712\dots) \tag{10.3}$$

(Sugg. sviluppate in serie e^z e ponete $z = x\log(x)$; usate l'esercizio precedente.)

E10.26 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:⋆.`

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa: mostrate che

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x))\,\mathrm{d}x\right) \le \int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x \quad . \tag{10.4}$$

Questo risultato è noto come **diseguaglianza di Jensen**.

Altri esercizi riguardo all'integrazione secondo Riemann si trovano in E8.6, E11.38, E12.4 parte $\mathcal{F}_{viii}$).

11 Funzioni derivabili

Sia nel seguito $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto. Dicendo che $f : A \to \mathbb{R}$ *è derivabile* intenderemo *derivabile in ogni punto*. Ricordiamo che $f \in C^1$ se f è derivabile e la derivata f' è continua; e, dato $k \geq 1$ intero, $f \in C^k$ se f è derivabile k-volte e le derivata $f^{(k)}$ è continua; e infine $f \in C^\infty$ se f è derivabile infinite volte.

E11.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, e $x, y \in I$ con $x < y$. Mostrare che se $f'(x) \cdot f'(y) < 0$ allora esiste $\xi \in I$ con $x < \xi < y$ tale che $f'(\xi) = 0$. *(Svolto il 3 Mag)*

E11.2 `Argomenti: Darboux. Prerequisiti:` E11.1. `Difficoltà: .`

`Note:`*Proprietà di Darboux.*

Sia A un aperto, e Sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile; vogliamo mostrare che per ogni intervallo $I \subset A$ l'immagine $f'(I)$ è un intervallo. *(Svolto il 3 Mag)*

Mostrate dunque questo risultato. Per ogni $x, y \in I$ con $x < y$, posto $a = f'(x), b = f'(y)$, assumiamo per semplicità che $a < b$; sia poi c con $a < c < b$: allora esiste $\xi \in I$ con $x < \xi < y$ tale che $f'(\xi) = c$.

(Mostrate infine che questa proprietà effettivamente implica che l'immagine $f'(I)$ di un intervallo I è un intervallo).

E11.3 `Argomenti: . Prerequisiti:` E11.2. `Difficoltà: .`

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$: mostrate allora che $f'(t)$ ha sempre lo stesso segno. *(Svolto il 3 Mag)*

E11.4 `Argomenti: . Prerequisiti:` E11.2. `Difficoltà:` $\star$.

Si trovi una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che mappa intervalli in intervalli ma per cui non esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto e con $f = g'$. *(Proposto il 3 Mag *)*

(Notate che f non può essere continua, per via del Teorema Fondamentale del Calcolo).

E11.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile , con $f' = f$: si mostri in maniera elementare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = \lambda e^x$.

E11.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si trovi una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile la cui derivata sia limitata ma non sia continua. *(Svolto il 3 Mag)*

E11.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si trovi una $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile la cui derivata sia illimitata. (Agli estremi $x = -1, 1$ si calcolano solo le derivate destra e rispettivamente sinistra). *(Proposto il 3 Mag)*

E11.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà:` $\star$.

Si trovi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che l'immagine di $[0, 1]$ secondo f' è $f'([0, 1]) = (-1, 1)$. *(Proposto il 3 Mag)*

Prima di cercare l'esempio, fate questa riflessione. Ricordiamo la proprietà di Darboux E11.2: l'immagine di un intervallo secondo f' è un intervallo; questa non dice però che l'immagine di $f'([0, 1])$ debba essere un intervallo chiuso e limitato. Se però si sapesse inoltre che f' è continua, cosa potreste dire di $f'([0, 1])$? Cosa ne deducete a priori dunque sull'esempio cercato?

E11.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile: mostrare che f' è continua se e solo se per ogni x

$$f'(x) = \lim_{(s,t)\to(x,x), s\neq t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} .$$

E11.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia f derivabile in $(a, b), x_0 \in (a, b)$ e $x_0 < \alpha_n < \beta_n, \beta_n \to x_0$ per $n \to \infty$. Si mostri che se la successione $\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$ è limitata allora

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \to_n f'(x_0)$$

Si mostri con un esempio che tale conclusione è falsa se la condizione data non è verificata.

E11.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Si supponga che una data funzione $f : (a, b) \to R$ sia derivabile in ogni punto di (a, b) tranne che in x_0 e che esista $\lim_{t\to x_0} f(t)$. Si mostri che f è derivabile anche in x_0 e che $f(x_0) = \lim_{t\to x_0} f(t)$.

E11.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in ogni punto. Si mostri che $\max\{f, g\}$ è derivabile salvo su un insieme al più numerabile.

E11.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che se $f(t) = 0$ allora $f'(t) = 0$. Mostrare che la funzione $g(t) = |f(t)|$ è derivabile.

E11.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ un polinomio con tutte radici reali e coefficienti tutti non nulli. Si mostri che il numero di radici positive (contate con molteplicità) è uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti di p. *[Sugg. si ragioni per induzione su n, utilizzando il fatto che tra due radici consecutive di p esiste una radice di p' .]*

E11.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile, e $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Mostrare che se $f'(a) = f'(b)$ allora esiste ξ con $a < \xi < b$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \ .$$

11.1 Derivate successive

E11.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia I un intervallo aperto e $x_o \in I$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e t.c. esista la derivata seconda f'' in x_0: allora si mostri che esiste il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{t^2}$$

e che coincide con $f''(x_0)$.

Si trovi poi un semplice esempio di f derivabile in $(-1, 1)$ e t.c. non esista la derivata seconda f'' in $x_0 = 0$, ma esista il precedente limite.

E11.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $n \geq 1$ intero. Sia I un intervallo aperto e $x_o \in I$, siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili $n-1$ volte nell'intervallo e la cui derivata $(n - 1)$-esima è derivabile in x_0. *(Svolto il 26 Apr)*

Si mostri allora che il prodotto fg è derivabile $n - 1$ volte nell'intervallo e la sua derivata $(n - 1)$-esima è derivabile in x_0. Si scriva una formula esplicita per la derivata n-esima $(fg)^{(n)}$ in x_0 del prodotto delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola f e della sola g).

(Se non la trovate, guardate in Wikipedia la Regola di Leibniz).

E11.18 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Sia $n \geq 1$ intero. Siano I, J intervalli aperti con $x_0 \in I, y_0 \in J$. Siano poi date $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ tali che f, g sono derivabili $n-1$ volte nei rispettivi intervalli, la loro derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0 (risp. y_0) e infine $f(x_0) = y_0$. *(Svolto il 26 Apr)*

Si mostri che la funzione composta $f \circ g$ è è derivabile $n-1$ volte nell'intervallo e la sua derivata $(n-1)$-esima è derivabile in x_0.

Si scriva una formula esplicita per la derivata n-esima $(f \circ g)^{(n)}$ in x_0 della composizione delle due funzioni, (formula che impieghi le derivate della sola f e della sola g). *(Se non la trovate, leggete la pagina wikipedia (in Inglese) Faà di Bruno's formula; oppure vedete questa presentazione).*

E11.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Cap. 6 Sez. 8 appunti 2017/18.*
Si mostri che la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

è di classe C^∞.

E11.20 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia dato N intero positivo. Si trovi un esempio di funzione C^∞ con $\varphi(x) = 0$ per $x < 0$ mentre $\varphi^{(n)}(x) > 0$ per $0 \le n \le N$ e $x > 0$.

Notiamo però che non si può richiedere che tutte le derivate siano positive, a causa dell'esercizio E14.2.

E11.21 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Cosa si può mettere al posto di "???" in modo che la funzione *(Proposto il 3 Mag)*

$$f(x) = \begin{cases} ??? & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ 1 & \text{se } x \ge 1\,, \\ 0 & \text{se } x \le 0\,. \end{cases}$$

sia di classe C^∞?

Più in generale, come si possono raccordare due funzioni C^∞? Date $f_0, f_1 \in C^\infty$ mostrate [64] che esiste una funzione $f \in C^\infty$ che soddisfa

$$\begin{array}{ll} f(x) = f_0(x) \quad \text{se } x \le 0 & , \\ f(x) = f_1(x) \quad \text{se } x \ge 1 & . \end{array}$$

E11.22 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Siano $f_0, f_1 \in C^\infty$ con $f_0', f_1' > 0$ e $f_1(1) > f_0(0)$ allora si può interpolare con una funzione $f \in C^\infty$ che soddisfi

$$\begin{array}{l} f(x) = f_0(x) \text{ se } x \le 0 \\ f(x) = f_1(x) \text{ se } x \ge 1 \end{array}$$

in modo che l'interpolante abbia $f' > 0$.

Cosa succede se $f_1(1) = f_0(0)$?

E11.23 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
`Note:`*Lemma di Hadamard.*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e tale che $f(0) = 0$. Sia, per $x \ne 0$, $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)/x$. Si mostri che g si prolunga, assegnando un opportuno valore a $g(0)$, e che la funzione prolungata è C^∞.

E11.24 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una funzione di classe C^∞ tale che $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \ne 0$, e $f''(0) \ne 0$: si mostri che

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & se\, x \ge 0 \\ -\sqrt{f(x)} & se\, x < 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞.

E11.25 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆ .`
Dati $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ e dati numeri reali $a_{i,h}$ $(i, h = 0, \ldots n)$ si mostri che esiste un polinomio $p(x)$ tale che $p^{(i)}(x_h) = a_{i,h}$.

E11.26 `Argomenti: . Prerequisiti: funzioni convesse. Difficoltà: .`
`Note:`*Esercizio 1 del compito Marzo 2010.*
Consideriamo le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tali che per ogni fissato $n \ge 0$, $f^{(n)}(x)$ abbia segno costante (e cioè non si annulli mai)[65]. Associamo a ogni tale funzione la sequenza dei segni che vengono assunti da f, f', f'' ....

Quali sono le possibili sequenze di segni, e quali invece sono le sequenze impossibili?

(Per es. presa $f(x) = e^x$, a questa si associa la sequenza $+++++\ldots$, che è dunque una sequenza possibile.)

Si veda anche l'esercizio E14.2.

Si vedano anche gli esercizi E9.35 e E9.36 sul rapporto fra convessità e proprietà delle derivate.

[64] Possibilmente con una semplice costruzione basata sull'esempio E11.19.
[65] Si intende che $f^{(0)} = f$.

11.2 Sviluppo di Taylor

(Svolto il 3 Mag)

Definizione 11.27 (Simboli di Landau) *Sia $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e I un intorno di a. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ per $x \neq a$. Diremo che "$f(x) = o(g(x))$ per x tendente ad a" se*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad ;$$

questa notazione si legge come "f è o piccolo di g".

Diremo che "$f(x) = O(g(x))$ per x tendente ad a" se

$$\limsup_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty \quad ,$$

cioè se esistono una costante $c > 0$ e un intorno J di a per cui $\forall x \in J, |f(x)| \leq c|g(x)|$. Questa notazione si legge come "f è O grande di g".

Nel seguito per semplicità consideriamo solo il caso in cui $\lim_{x \to a} g(x) = 0$; inoltre negli sviluppo di Taylor si ha sempre che $g(x) = (x - a)^n$ con $n \geq 1$ intero. [66]

Nota 11.28 *Attenzione! I simboli "o piccolo" e "O grande" sono usati in modo diverso da altri simboli della Matematica. Infatti essi possono rappresentare funzioni diverse, anche nello stesso contesto! Ad esempio se scriviamo*

$$\sin(x) = x + o(x) \quad , \quad \cos(x) = 1 + o(x)$$

i due simboli "$o(x)$" a destra e a sinistra rappresentano funzioni diverse. Particolare cura dunque va messa nel mostrare le proprietà usate nel calcolo.

Vediamo due esempi. Sia $a = 0$ per semplicità.

(Svolto il 3 Mag)

Esempio 11.29 *Enunciamo in maniera informale questa proprietà.*

$$\text{Se } n \geq m \geq 1 \text{ allora } o(x^n) + o(x^m) = o(x^m).$$

Per dimostrarla la convertiamo in un enunciato preciso. Innanzitutto la riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^m) \text{ allora } f(x) + g(x) = o(x^m).$$

Dunque la dimostriamo. Come ipotesi abbiamo che $\lim_{x \to 0} f(x)x^{-n} = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x)x^{-m} = 0$ allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^m} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} + \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} \frac{f(x)}{x^n} + 0 = 0.$$

(Svolto il 3 Mag)

Esempio 11.30 *Enunciamo in maniera informale questa seconda proprietà*

$$\text{Se } n \geq 1 \text{ allora } o\Big(x^n + o(x^n)\Big) = o(x^n).$$

La riscriviamo così.

$$\text{Se } f(x) = o(x^n) \text{ e } g(x) = o(x^n + f(x)) \text{ allora } g(x) = o(x^n).$$

Notiamo che, per $x \neq 0$ piccolo, $x^n + f(x)$ è non nullo, in quanto esiste un intorno in cui $|f(x)| \leq |x^n/2|$. Come ipotesi abbiamo che $\lim_{x \to 0} f(x)x^{-n} = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x)/(x^n + f(x)) = 0$ allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} \frac{x^n + f(x)}{x^n}$$

ma

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n + f(x)} = 0$$

mentre

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n + f(x)}{x^n} = 1 \quad .$$

E11.31 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $a = 0$ per semplicità. Riscrivete le successive relazioni e dimostratele. *(Proposto il 3 Mag, pseudo)*

- Se $n \geq m \geq 1$ allora

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^m), \quad o(x^n) + O(x^m) = O(x^m), \quad x^n + O(x^m) = O(x^m) \quad .$$

- Se $n > m \geq 1$ allora

$$O(x^n) + o(x^m) = o(x^m), \quad x^n + o(x^m) = o(x^m).$$

- Per $n, m \geq 1$

$$\begin{aligned} x^n O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ x^n o(x^m) &= o(x^{n+m}) \\ O(x^n) O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ o(x^n) O(x^m) &= o(x^{n+m}) \end{aligned}$$

-

$$\int_0^y O(x^n)\,\mathrm{d}x = O(y^{n+1}) \qquad \int_0^y o(x^n)\,\mathrm{d}x = o(y^{n+1}) \quad .$$

E11.32 `Argomenti: .Prerequisiti: .Difficoltà: .`

Si scriva il polinomio di $f(x)$ intorno a $x_0 = 0$, sfruttando *"il calcolo di Landau degli $o(x^n)$"* visto sopra. *(Proposto il 3 Mag, pseudo)*

$f(x)$	=	$p(x) + o(x^4)$	
$(\cos(x))^2$	=		$+o(x^4)$
$(\cos(x))^3$	=		$+o(x^4)$
$\cos(x)e^x$	=		$+o(x^4)$
$\cos(\sin(x))$	=		$+o(x^4)$
$\sin(\cos(x))$	=		$+o(x^4)$
$\log(\log(e + x))$	=		$+o(x^3)$
$(1 + x)^{1/x}$	=		$+o(x^3)$

(Per sviluppare gli ultimi due sarà necessaria un po' di fantasia; per ridurre i conti, si sviluppino gli ultimi due solo fino a $o(x^3)$).

E11.33 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si trovi un' approssimazione razionale di $\cos(1)$ con errore minore di $1/(10!) \sim 2.10^{-7}$ *(Svolto il 8 Mag ◊)*

E11.34 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si scriva lo sviluppo di Taylor di $(1 + x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. *(Svolto il 8 Mag ◊)*
(Se ne deduca una generalizzazione del simbolo binomiale $\binom{\alpha}{k}$).

E11.35 `Argomenti: . Prerequisiti: esercizio E10.19. Difficoltà: .`

`Note:`*Da un idea nell' Apostol, capitolo 7.3.*

Scrivere lo sviluppo di Taylor (intorno a $x_0 = 0$) per $-\log(1 - x)$ integrando *(Svolto il 8 Mag ◊)*

$$\frac{1}{(1 - x)} = 1 + x + ... + x^{n-1} + x^n/(1 - x)$$

e confrontare il "resto"

$$\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 - t)}\,\mathrm{d}t \tag{11.2}$$

così ottenuto con lo sviluppo con il "resto integrale" di $f(x) = -\log(1 - x)$ (esercizio E10.19).
Procedere similmente per $\arctan(x)$ integrando

$$1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n x^{2n+2}/(1 + x^2) \quad .$$

E11.36 `Argomenti: .Prerequisiti: esercizio E10.19 e E11.35.Difficoltà: .`

Valutare per quali $r > 0$ si ha che il resto di Taylor di $f(x) = -\log(1-x)$ è infinitesimo in n, uniformemente per $|x| < r$; questo, usando il resto visto in (11.2), usando il resto integrale oppure usando il resto di Lagrange. *(Svolto il 8 Mag ◊)*

Si veda anche l'esercizio E10.19.

11.3 Derivate parziali e totali, differenziali

E11.37 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Verificate che le seguenti derivate parziali esistono e calcolatele: *(Svolto il 10 Mag ◊)*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4xy + 3x^2y - zy^2\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(4xy + 3x^2y - zy^2\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{ze^{x+|y|}}{1+x^2|y|}$$

E11.38 `Argomenti: . Prerequisiti: integrale di Riemann. Difficoltà: .`

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $0 \in I$. Data $f = f(x,y) : I \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e tale che anche $\frac{\partial}{\partial x} f$ esiste ed è continua, posto *(Svolto il 8 Mag ◊)*

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

mostrate che g è di classe C^1, e che

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

E11.39 `Argomenti: . Prerequisiti: integrale di Riemann, E8.7, E8.6, E11.38. Difficoltà: .`

Sia *(Svolto il 8 Mag ◊)*

$$h(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,z)\mathrm{d}z$$

dove a, b, f sono funzioni di classe C^1: mostrate che h è di classe C^1 e calcolate la derivata.

E11.40 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0,0)$?

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{se } x > 0 \\ x + ye^{-x^2} & \text{se } x \le 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$f_3(x,y) = (\arctan(y+1))^{x+1} \quad , \quad f_4(x,y) = \max\{x^2, y^2\}\ .$$

E11.41 `Argomenti: . Prerequisiti: E1.134. Difficoltà: .`

Sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Ricordiamo che per il Teorema di Schwarz invertendo le operazioni di derivazione parziale di f, il risultato non cambia. Sia $N(n,k)$ il numero di derivate parziali (potenzialmente diverse) di ordine n: mostrate che $N(n,k) = \binom{n+k-1}{k-1}$ (che è un polinomio a coefficienti interi nella variabile n, di ordine $k-1$). *(Svolto il 10 Mag)*

E11.42 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, sia $\overline{x} \in W$. Sia poi $\psi : W \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Sia $\nabla\psi(\overline{x})$ il vettore riga di coordinate $\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(\overline{x})$ (che è il gradiente di ψ, caso particolare della "matrice Jacobiana"); lo abbreviamo

[66] Alcuni tesi usano anche la notazione $o(1)$ per indicare una quantità infinitesima per $x \to a$, ma questo può generare confusione.

a $D = \nabla\psi(\overline{x})$ per semplicità; sia H la matrice Hessiana di componenti $H_{h,k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k x_h}\psi(\overline{x})$; si mostri la validità della formula di Taylor al secondo ordine

$$\psi(\overline{x}+v) = Dv + \frac{1}{2}v^t Hv + o(|v|^2)$$

(notate che il prodotto Dv è una matrice 1×1 che identifichiamo con un numero reale, e similmente per $v^t Hv$).

E11.43 `Argomenti: . Prerequisiti: E11.42. Difficoltà: .`
Siano $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti non vuoti, e sia $G : V \to W$ di classe C^2. Sia $\overline{y} \in V$ e $\overline{x} = G(\overline{y}) \in W$. Sia poi $\psi : W \to \mathbb{R}$ di classe C^2; posto $\tilde{\psi} = \psi \circ G$, confrontare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di ψ e di $\tilde{\psi}$ (centrati rispettivamente in $\overline{x}$ e $\overline{y}$). Supponendo inoltre che G sia un diffeomorfismo verificare che

- $\overline{x}$ è un punto stazionario per ψ se e solo se $\overline{y}$ è punto stazionario anche per $\tilde{\psi}$,
- e in questo caso gli Hessiani di ψ e di $\tilde{\psi}$ sono simili (cioè le matrici sono uguali a meno di cambio di coordinate).

11.4 Teorema di funzione implicita e problemi vincolati

Useremo il Teorema di Funzione Implicita, nella versione a più variabili (Teorema 7.22 negli appunti 2015/16). Lo riportiamo qui per comodità, con alcune piccole modifiche nelle notazioni.

Teorema 11.44 (Teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^n$) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A aperto, e sia $\overline{x} = (\overline{x}', \overline{x}_n) \in A$ tale che $\partial_{x_n} f$ esiste in un intorno di $\overline{x}$, è continua in $\overline{x}$ e $\partial_{x_n} f(\overline{x}) \neq 0$. Poniamo $\overline{a} = f(\overline{x})$.*

Esiste allora un intorno "cilindrico" U di $\overline{x}$

$$U = U' \times J$$

dove

$$U' = B(\overline{x}', \alpha)$$

è la palla aperta in $\mathbb{R}^{n-1}$ centrata in $\overline{x}'$ di raggio $\alpha > 0$, e

$$J = (\overline{x}_n - \beta, \overline{x}_n + \beta)$$

con $\beta > 0$; per questo intorno si ha che $U \cap f^{-1}(\{\overline{a}\})$ è il grafico $x_n = g(x')$, con g continua su U' a valori in J. Questo significa che, per ogni $x = (x', x_n) \in U$, si ha $f(x) = \overline{a}$ se e solo se $x_n = g(x')$.

Inoltre, se f è di classe C^k su A per qualche $k \in \mathbb{N}^*$, allora g è di classe C^k su U' e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x') = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x', g(x'))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x', g(x'))} \qquad \text{per ogni } x' \in U' \text{ e } 1 \leq i \leq n-1\,. \tag{11.3}$$

E11.45 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Consideriamo la seguente funzione di 2 variabili di classe C^∞ *(Svolto il 10 Mag ◊)*

$$f(x,y) = x^3 + y^4 - 1 \quad .$$

Verificate che $\{f = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ non sia vuoto; indi, per ogni punto del piano dove questa si annulla discutete se si può applicare il teorema di funzione implicita, e dunque se l'insieme $\{f = 0\}$ è localmente grafico di funzione C^∞. Studiate inoltre l'insieme $\{f = 0\}$: è compatto? Quante componenti connesse vi sono?

(Tenere presente quanto mostrato in E11.52).

E11.46 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Ripetete lo studio dell'esercizio precedente per la funzione *(Svolto il 17 Mag ◊)*

$$f(x,y) = \sin(x+y) + x^2 \quad .$$

E11.47 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Note:*Esercizio 2 Compito 30 Giugno 2017.*
Ripetete lo studio dell'esercizio precedente per la funzione *(Svolto il 17 Mag ◊)*

$$f(x, y) = 1 + 4x + e^x y + y^4 \quad .$$

Mostrare che il luogo di zeri non è compatto.

E11.48 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenziabili e tali che in $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ si ha che $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ sono linearmente indipendenti e che $f(p_0) = g(p_0) = 0$: mostrare che l'insieme $E = \{f = 0, g = 0\}$ è una curva in un intorno di p_0. *(Sugg. considerate che il prodotto vettore $w = \nabla f(p_0) \times \nabla g(p_0)$ è nonnullo se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti — infatti è formato dai determinanti dei minori della matrice Jacobiana; assumendo senza perdita di generalità che $w_3 \neq 0$, mostrate che E è localmente il grafico di una funzione $(x, y) = \gamma(z)$.)* *(Svolto il 17 Mag)*

11.4.1 Estensioni

Vediamo ora alcune varianti del teorema "standard".

E11.49 Argomenti: . Prerequisiti: 8.23. Difficoltà: .
Lavoriamo nelle ipotesi del teorema 11.44. Mostrate che se $f(\cdot, y)$ è Lipschitziana di costante L per ogni fissato y cioè *(Svolto il 17 Mag ◊)*

$$|f(x'_1, y) - f(x'_2, y)| \leq L|x'_1 - x'_2| \ \forall x'_1, x_2 \in U', y \in J$$

(e $L > 0$ non dipende da x'_1, x'_2, y) allora g è Lipschitziana di costante L'. Che rapporto vi è fra le costanti L e L'?

Similmente se f è Hölderiana.

E11.50 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Nelle stesse ipotesi del precedente teorema 11.44, mostrate che esistono $\varepsilon > 0$ e una funzione continua $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$ dove $I = (\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon)$ e $V = U' \times I$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, tali che *(Svolto il 17 Mag)*

$$\forall (x', a) \in V \quad , \quad (x', \tilde{g}(x', a)) \in U \quad \text{e} \quad f(x', \tilde{g}(x', a)) = a \quad ; \tag{11.4}$$

e viceversa se $x \in U$ e $a = f(x)$ e $a \in I$ allora $x_n = \tilde{g}(x', a)$. Notate che la precedente relazione significa che, per ogni fissato $x' \in U'$, la funzione $g(x', \cdot)$ è l'inversa della funzione $f(x', \cdot)$ (quando definite su opportuni intervalli aperti).

Dunque si ha anche che la funzione $\tilde{g}$ è sempre differenziabile rispetto ad a, e la derivata parziale è $\frac{\partial}{\partial a}\tilde{g}(x', a) = 1/\frac{\partial}{\partial x_n} f(x', g(x', a))$. Le altre derivate invece (ovviamente) sono come nel teorema 11.44.

La regolarità di $\tilde{g}$ è la stessa di g: se f è Lipschitziana allora $\tilde{g}$ è Lipschitziana; se $f \in C^k(U)$ allora $\tilde{g} \in C^k(V)$.

E11.51 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Nelle stesse ipotesi dell'esercizio E11.50, assumiamo inoltre che $f \in C^1(A)$.

- Decomponiamo $y = (y', y_n), \in \mathbb{R}^n$ come già fatto per x. Definiamo la funzione $G : V \to \mathbb{R}^n$ come $G(y) = (y', \tilde{g}(y))$. Sia $W = G(V)$ l'immagine di V, mostrate che $W \subseteq U$ e che W è aperto.
- Mostrate che è $G : V \to W$ è un diffeomorfismo; e che la sua inversa è la mappa $F(x) = (x', f(x))$.
- Poniamo $\tilde{f} = f \circ G$. Mostrate che $\tilde{f}(x) = x_n$.

(Questo esercizio sarà usato, insieme al E11.43, per affrontare i problemi vincolati in sezione 11.4.2).

E11.52 Argomenti: . Prerequisiti: E4.47, E4.48, E5.70, E5.71, E11.21, 11.44, E15.6 e E15.13. Difficoltà: ⋆⋆.
Per questo esercizio sono necessarie definizioni e risultati presentati nel capitolo 15. *(Svolto il 17 Mag, cenni)*

Sia $r \geq 1$ intero, o $r = \infty$. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^r, e tale che $\nabla F \neq 0$ in ogni punto in cui $F = 0$.

Sappiamo da che E4.47 che $\{F = 0\}$ è l'unione disgiunta di componenti connesse, da E4.48 che ogni componente connessa è un chiuso.

Mostrate che per ogni componente connessa K vi è un aperto $A \supseteq K$ tale che $K = A \cap \{F = 0\}$, e che dunque vi è un numero al più numerabile di componenti connesse.

Mostrate che ogni componente connessa è il sostegno di una curva semplice immersa e di classe C^r, di uno dei seguenti due tipi:

- la curva è chiusa, oppure
- la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ non è chiusa e è illimitata (cioè $\lim_{t\to\pm\infty} |\gamma(t)| = \infty$).

Il primo caso si verifica se e solo se la componente connessa è un compatto.

11.4.2 Problemi vincolati

Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e f, φ funzioni reali di classe C^1 su A. Fissato $a \in \mathbb{R}$ definiamo poi l'insieme di livello

$$E_a = \{x \in A : \varphi(x) = a\}$$

assumiamo che E_a sia non vuoto, e che $\nabla\varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in E_a$. Chiamiamo **punto di minimo locale di** f **vincolato a** E_a un punto di E_a che sia di minimo locale per $f|_{E_a}$; e similmente per i massimi.

Per risolvere i seguenti esercizi potrà essere utile applicare i risultati visti in E11.42, E11.43, E11.51.

E11.53 `Argomenti: . Prerequisiti: E11.51. Difficoltà: .`
Siano f, φ di classe C^1 nell' aperto A, e sia x un punto di minimo vincolato per f rispetto a E_a (dunque $\varphi(x) = a$). Mostrate che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) + \lambda\nabla\varphi(x) = 0$; questo λ è detto **il moltiplicatore di Lagrange**.

E11.54 `Argomenti: . Prerequisiti: E11.43,E11.53. Difficoltà: .`
Siano f, φ di classe C^2 nell' aperto A, e sia x un punto di minimo vincolato per f rispetto a E_a; sia λ il moltiplicatore di Lagrange; definiamo $h = f(x) + \lambda\varphi(x)$, allora

$$\forall v, v \cdot \nabla\varphi(x) = 0 \Longrightarrow v \cdot Hv \geq 0$$

dove H è la matrice Hessiana di h.

E11.55 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Nelle stesse ipotesi, vediamo un "vice versa". Siano f, φ di classe C^2 nell' aperto A, e siano $x \in E_a$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(x) + \lambda\nabla\varphi(x) = 0$ e oltretutto posto $h = f(x) + \lambda\varphi(x)$ si abbia

$$\forall v, v \cdot \nabla\varphi(x) = 0 \Longrightarrow v \cdot Hv > 0$$

dove H è la matrice Hessiana di h in x. Si mostri allora che x è un punto di minimo locale vincolato per f rispetto a E_a.

Consideriamo ora un diverso tipo di vincolo. Sia

$$F_a = \{x \in A : \varphi(x) \leq a\} \quad ;$$

assumiamo sempre che F_a sia non vuoto e che $\nabla\varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in E_a$. Chiamiamo **punto di minimo locale di** f **vincolato a** F_a un punto di F_a che sia di minimo locale per $f|_{F_a}$; e similmente per i massimi.

E11.56 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $\partial F_a = E_a$ e che F_a coincide con la chiusura della sua parte interna. *(Le operazioni di chiusura e frontiera vanno eseguite all'interno di A, visto come spazio topologico!)*

E11.57 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che condizione necessaria perché $x \in A$ sia minimo locale di f vincolata a F_a è che,

- o $\varphi(x) < a$ e $\nabla f(x) = 0$,
- oppure $\varphi(x) = a$ e $\nabla f(x) + \lambda\nabla\varphi(x) = 0$ con $\lambda \geq 0$.

Queste sono le condizioni di **Karush–Kuhn–Tucker**.

E11.58 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Nel caso $n = 1$, supponiamo che A sia un intervallo aperto, mostrate che se $\varphi(x) = a$ e $f'(x)\varphi'(x) < 0$ allora il punto x è punto di minimo locale per f vincolata a F_a.

E11.59 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Trovate un semplice esempio nel caso $n = 2$ in cui il punto x non è di minimo locale per f vincolata a F_a, ma $\varphi(x) = a$ e $\nabla f(x) + \lambda\nabla\varphi(x) = 0$ con $\lambda > 0$.

12 Limiti di funzioni

E12.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*Questo risultato è noto come "lemma del Dini".*

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un compatto e $f_n : I \to \mathbb{R}$ continue e tali che $f_n(x) \searrow_n 0$ puntualmente (cioè per ogni x e n si ha $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ e $\lim_n f_n(x) = 0$); si mostri allora che $f_n \to f$ uniformemente. *(Svolto il 13 Mar)*

E12.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate un esempio di $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \searrow_n 0$ puntualmente ma non $f_n \to f$ uniformemente. *(Svolto il 13 Mar ◊)*

E12.3 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate un esempio di $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continue e limitate e tali che $f_n(x) \to_n 0$ puntualmente ma non $f_n \to f$ uniformemente. *(Svolto il 13 Mar ◊)*

E12.4 `Argomenti: funzioni equicontinue. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Quali di queste classi $\mathcal{F}$ di funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ sono chiuse per convergenza uniforme? quali sono chiuse per convergenza puntuale? *(Svolto il 22 mar punti $\mathcal{F}_i$) e $\mathcal{F}_{iv}$))*

$\mathcal{F}_i$) Le funzioni continue e monotone (debolmente) crescenti su $I = [0,1]$.

$\mathcal{F}_{ii}$) Le funzioni convesse su $I = [0,1]$.

$\mathcal{F}_{iii}$) Data $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una fissata funzione continua con $\omega(0) = 0$ (che è detta *"modulo di continuità"*), sia
$$\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, \forall x, y, |f(x) - f(y)| \le \omega(|x-y|)\}$$
(questa è detta *una famiglia di funzioni equicontinue*.) [67]

$\mathcal{F}_{iv}$) Dato $N \ge 0$ fissato, la famiglia di tutti i polinomi di grado minore o uguale a N, visti come funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$\mathcal{F}_v$) Le funzioni regolate su $I = [0,1]$. [68]

$\mathcal{F}_{vi}$) Le funzioni uniformemente continue e limitate su $I = \mathbb{R}$.

$\mathcal{F}_{vii}$) Le funzioni Hoelderiane su $I = [0,1]$, cioè
$$\left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists b > 0, \exists \alpha \in (0,1]\ \forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \le b|x-y|^\alpha \right\}$$

$\mathcal{F}_{viii}$) Le funzioni Riemann integrabili su $I = [0,1]$.

E12.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Ci chiediamo se le classi precedenti $\mathcal{F}$ godono di una *"proprietà di rigidità"*, cioè se da una convergenza più "debole" nella classe segue una convergenza più "forte". Dimostrate le seguenti proposizioni. *(Svolto il 22 mar * punti $\mathcal{F}_i$) e $\mathcal{F}_{iv}$))*

$\mathcal{F}_i$) Siano f_n, f continue e monotone (debolmente) crescenti su un intervallo $I = [a,b]$ chiuso e limitato. Se vi è un insieme denso J in I e con $a, b \in J$ per cui $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora $f_n \to_n f$ uniformemente.

$\mathcal{F}_{ii}$) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. Siano f_n, f convesse su A. Se vi è un insieme J denso in A tale che $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora per ogni $[a,b] \subset A$ si ha che $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a,b]$.

$\mathcal{F}_{iii}$) Siano f_n equicontinue su un intervallo $I = [a,b]$ chiuso e limitato, e sia ω il loro modulo di continuità.
Se vi è un insieme J denso in $[a,b]$ tale che $\forall x \in J, f_n(x) \to_n f(x)$, allora, f si estende da J a I in modo da essere continua (con modulo ω), e $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a,b]$.

$\mathcal{F}_{iv}$) Siano f_n, f polinomi di grado minore o uguale a N, su un intervallo $I = [a,b]$ chiuso e limitato, e siano fissati $N+1$ punti distinti $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N \le b$, e sia, per ogni x_i, $f_n(x_i) \to_n f(x_i)$: allora f_n convergono a f uniformemente, e così ogni loro derivata $D^k f_n \to_n D^k f$ uniformemente.

[67] Riguardo alla nozione di "modulo di continuità" si veda anche E8.12.

[68] Le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *regolate* sono le funzioni che ammettono in ogni punto limite destro e limite sinistro finiti. Si veda la Sezione 7.2.

Si cerchino inoltre controesempi per simili proposizioni quando applicate alle altre classi di funzioni viste nell'esercizio precedente.

E12.6 `Argomenti: . Prerequisiti: E12.4.(`$\mathcal{F}_{vi}$`). Difficoltà: .`

Se $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ sono uniformemente continue su un insieme $I \subset \mathbb{R}$, e $f_n \to_n f$ uniformemente su I, allora f è uniformemente continua, e la famiglia $(f_n)_n$ è equicontinua. *(Proposto il 22 Mar)*

E12.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le traslate di f, definite (per $t \in \mathbb{R}$) da $g_t(x) = f(x - t)$. Si mostri che g_t tende puntualmente a f per $t \to 0$ se e solo se f è continua; e che g_t tende uniformemente a f per $t \to 0$ se e solo se f è uniformemente continua. *(Proposto il 22 Mar ◊)*

E12.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*simile al teorema 6.5 negli appunti 2016/17, Cor. 6.6 appunti 2017/18.*

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un aperto, sia $\hat{x}$ un punto di accumulazione per I [69], sia $f_m : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni limitate che convergono uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}$ quando $m \to \infty$. Supponiamo che per ogni m esista $\lim_{x \to \hat{x}} f_m(x)$ allora

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{x\to\hat{x}} f_m(x) = \lim_{x\to\hat{x}} \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste allora esiste anche l'altro, e sono uguali. (Il precedente risultato vale anche per limiti destri o limiti sinistri).

Mostrate con un semplice esempio che se il limite non è uniforme allora la precedente uguaglianza non vale.

(Si veda anche l'esercizio E3.4).

E12.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo compatto, siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue. Mostrate che i due seguenti fatti sono equivalenti. *(Proposto il 22 Mar)*

a. Per ogni $x \in X$ e per ogni successione $(x_n)_n \subset I$ per cui $x_n \to_n x$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$;

b. $f_n \to_n f$ uniformemente su I.

Trovate indi un esempio dove $I = [0, 1)$, il primo punto vale, ma f_n non tende uniformemente a f.

[69] Includendo anche il caso in cui I è superiormente illimitato e $\hat{x} = +\infty$, oppure il caso in cui I è inferiormente illimitato e $\hat{x} = -\infty$.

13 Serie di potenze

E13.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ha raggio di convergenza positivo se e solo se se esiste $l > 0$ per cui $|a_k| \le l^k$ per ogni $k \ge 1$. *(Svolto il 19 Apr)*

E13.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Siano c_k numeri complessi, e $a_k = |c_k|$; si noti che le serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ hanno lo stesso raggio di convergenza. *(Svolto il 19 Apr)*

Posta, per $t > 0$ reale $\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, si noti che questa formula definisce una funzione monotona $\tilde{f} : [0, \infty) \to [0, \infty]$; si mostri che il raggio di convergenza coincide con l'estremo superiore dei $t \ge 0$ per cui $\tilde{f}(t) < \infty$.

E13.3 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate due esempi di serie $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k > 0$ e con raggio di convergenza r positivo e finito, per cui *(Svolto il 19 Apr)*

- $f(r) < \infty$
- $f(r) = \infty$

E13.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Trovate un esempio di serie $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con $a_k \in \mathbb{R}$ e con raggio di convergenza r positivo e finito, per cui esiste il limite $\lim_{t\to r-} f(t)$ ma la serie non converge in $t = r$. Notate che (per il Lemma di Abel) se la serie converge in $t = r$ allora esiste il limite $\lim_{t\to r-} f(t) = f(r)$. *(Svolto il 19 Apr)*

E13.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Siano $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supponendo che $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ con raggio di convergenza r positivo e $t \in (-r, r)$, si determinino i coefficienti a_k in modo da soddisfare le seguenti equazioni differenziali. *(Svolto il 19 Apr)*

(a) $f'(t) = f(t)$ e $f(0) = b$,
(b) $f'(t) = t^2 f(t)$ e $f(0) = b$,
(c) $f''(t) = t^2 f(t)$ e $f(0) = b$, $f'(0) = 0$,
(d) $tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0$ e $f(0) = b$, $f'(0) = 0$,
(e) $t^2 f''(t) + tf'(t) + (t^2 - n^2) f(t) = 0$ e $f(0) = b$, $f'(0) = 0$,

dove $b \in \mathbb{R}$ è un parametro fissato. (Le ultime due sono dette *Equazioni di Bessel*).

Si vedano anche gli esercizi E19.17, E19.19 e E19.16.

13.1 Somma e prodotto, composizione e inversa

E13.6 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.2. Difficoltà: .`

Consideriamo le serie di potenze *(Svolto il 19 Apr)*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \,,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente r_f e r_g.
Si mostri che la funzione prodotto $h(x) = f(x)g(x)$ si può esprimere in serie di potenze

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

dove

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \,;$$

con raggio di convergenza $r_h \ge \min\{r_f, r_g\}$. (Si noti la somiglianza con il prodotto di Cauchy, discusso in sezione 3.3.1)

Può succedere che $r_h > \min\{r_f, r_g\}$?

E13.7 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.1. Difficoltà: ⋆.`

Sia $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ con $b_0 = g(0) \neq 0$: si esprima formalmente la funzione reciproca $f(x) = 1/g(x)$ come serie di potenze e si calcolino i coefficenti a partire dai coefficienti b_m; se il raggio di convergenza di g è non nullo si mostri che il raggio di convergenza di f è non nullo e che $f(x) = 1/g(x)$ laddove le due serie $f(x), g(x)$ convergono. *(Proposto il 19 Apr)*

E13.8 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.2,E11.18. Difficoltà: ⋆.`

Consideriamo le serie di potenze *(Proposto il 26 Apr)*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \ ,$$

con raggio di convergenza non nullo, rispettivamente r_f e r_g. Supponiamo che $g(0) = 0 = b_0$. Siano $I_f, I_g \subset \mathbb{C}$ dischi centrati in zero con raggi minori rispettivamente di r_f e r_g: le precedente serie dunque definiscono funzioni $f : I_f \to \mathbb{C}$ e $g : I_g \to \mathbb{C}$. A meno di rimpicciolire I_g, assumiamo che $g(I_g) \subset I_f$.

Si mostri che la funzione composta $h = f \circ g : I_g \to \mathbb{C}$ si può esprimere come serie di potenze $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ (con raggio di convergenza almeno r_g); si mostri come i coefficienti c_k possono essere calcolati dai coefficienti a_k, b_k.

E13.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`

Sia $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ con raggio di convergenza non nullo r_g. Sia $I_g \subset \mathbb{C}$ un disco centrato in zero di raggio minore di r_g; assumiamo $g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$; abbiamo dunque definito una funzione $g : I_g \to \mathbb{C}$. Assumendo che l'inversa $f(y) = g^{-1}(y)$ si possa esprimere in serie di Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcolate i coefficienti della serie di f partendo da quelli di g. *(Proposto il 26 Apr)*

E13.10 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.9. Difficoltà: ⋆⋆.`

Definendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove i coefficienti a_n sono stati ricavati nel precedente esercizio, si provi a mostrare che il raggio di convergenza f è positivo. [70]

13.2 Exp,sen,cos

E13.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, possiamo definire

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Si noti che il raggio di convergenza è infinito. Si mostri che $e^{z+w} = e^z e^w$.

E13.12 `Argomenti: . Prerequisiti: E3.32. Difficoltà: .`

Dato $z \in \mathbb{C}$, mostrate che

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z \tag{13.1}$$

e che il limite è uniforme sui compatti.

E13.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, possiamo allora calcolare l'esponenziale complesso come prodotto $e^z = e^x e^{iy}$. Si usino gli sviluppi in serie di potenze per mostrare la *identità di Eulero* $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

E13.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Viceversa si noti allora che $\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{i2}$.

E13.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si usi la precedente formula per verificare le note identità

$$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$$

[70] La dimostrazione si può trovare a pg 26 nel libro di Henri Cartan *"Elementary theory of analytic functions ..."*, 1995.

E13.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Definiamo le funzioni *coseno iperbolico* [71]

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

e *seno iperbolico*

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

- Si verifichi che
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$
(che giustifica il nome di "iperbolico").
- Si verifichino gli sviluppi in serie
$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + ...$$
$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + ...$$
- Si verifichi che
$$\cosh' = \sinh \quad , \quad \sinh' = \cosh$$
- Si verifichino le formule
$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x \, .$$

13.3 Esponenziale di matrici

Definizione 13.17 *Definiamo l'esponenziale di matrici come*

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

dove si intende che $A^0 = \mathbb{I}$, la matrice identità.

E13.18 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.22, Sez. 6.4, E6.29, E6.26, E13.12. Difficoltà: .`
Dotiamo lo spazio delle matrici $\mathbb{C}^{n\times n}$ di una delle norme viste in Sezione 6.4.1.

- Mostrate che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ converge.
- Mostrate che
$$\exp(A) = \lim_{N\to\infty} \Big(I + A/N\Big)^N \tag{13.2}$$
dove I è la matrice identità in $\mathbb{R}^{n\times n}$; e che la convergenza è uniforme in ogni intorno compatto di A. *(Sugg. fate buon uso del simile risultato E13.12.)*

E13.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A è invertibile allora

$$A \exp(B) A^{-1} = \exp(ABA^{-1}) \, .$$

E13.20 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
La derivata di

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$$

è $A\exp(tA)$.

[71] Si veda la pagina di Wikipedia "Derivazione delle funzioni iperboliche" che spiega in quale senso y è un "angolo".

E13.21 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A, B commutano allora

$$A\exp(B) = \exp(B)A \quad , \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \, .$$

In particolare $\exp(A)$ è sempre invertibile e la sua inversa è $\exp(-A)$.

E13.22 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Se A, B commutano allora la derivata direzionale di $\exp$ nel punto A in direzione B è $B\exp(A)$, cioè

$$\frac{d}{dt}\exp(A+tB)|_{t=0} = B\exp(A) \ .$$

E13.23 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{trace}(A)) \ .$$

(Sugg. usate la formula di Jacobi [72] per la derivata di $\det(tA)$ e il risultato precedente. Vedere anche E18.30).

E13.24 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`
Nel caso generale (quando non sappiamo se A, B commutano) procediamo come segue. Definiamo $[A, B] = AB - BA$.

- Posto $B_0 = B$ e $B_{n+1} = [A, B_n]$ si ha

$$\begin{aligned} B_n &= A^n B - nA^{n-1}BA + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}BA^2 + \cdots + (-1)^n BA^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} A^{n-k}BA^k \ ; \end{aligned}$$

- definiamo ora $Z = Z(A, B)$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \ , \tag{13.3}$$

  (notate che Z è lineare in B): si mostra che

$$\exp(A)B\exp(-A) = Z \ ; \tag{13.4}$$

- da questa infine si dimostra che

$$\exp(A)\exp(B)\exp(-A) = \exp(Z) \ .$$

(Queste formule si possono vedere come conseguenze della formula di Baker–Campbell–Hausdorff [73]).

E13.25 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.18. Difficoltà: .`
In generale

$$\exp(A+B) = \lim_{N\to\infty}\Big(\exp(A/N)\exp(B/N)\Big)^N$$

E13.26 `Argomenti: . Prerequisiti: E18.30. Difficoltà: ⋆⋆.`
Nel caso generale (anche quando non sappiamo se A, B commutano), possiamo esprimere $\exp(A+sB)$ usando una espressione in serie di potenze. Definiamo

$$C(t) = \exp(-tA)B\exp(tA)$$

[72] `http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi%27s_formula`
[73] `http://en.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff_formula`

e ricorsivamente Q_0 =Id l'identità e poi

$$Q_{n+1}(t) = \int_0^t C(\tau)Q_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

allora si ha

$$\exp(-A)\exp(A+sB) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n Q_n(1)\ . \tag{13.5}$$

e questa serie converge per ogni s.
Se ne ricava in particolare che la derivata direzionale di $\exp$ nel punto A in direzione B è

$$\frac{d}{ds}\exp(A+sB)|_{s=0} = \exp(A)Q_1(1) = \int_0^1 \exp((1-\tau)A)B\exp(\tau A)\,\mathrm{d}\tau\ .$$

(Sugg. usate l'esercizio E18.30 con $Y(t,s) = \exp(-tA)\exp(t(A+sB))$ e poi ponete $t = 1$.)

E13.27 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.24. Difficoltà: ⋆.`
Dimostrate la relazione

$$\frac{d}{dt}\exp(A+tB)|_{t=0} = \int_0^1 \exp(sA)B\exp((1-s)A)\,\mathrm{d}s\ .$$

usando le relazioni (13.3) e (13.4) di esercizio E13.24.

14 Analitiche

E14.1 `Argomenti: . Prerequisiti: E11.19. Difficoltà: .`
`Note:`*Sez. 6 Cap. 8 appunti 2017/18.*
Si verifichi che la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \le 0 \end{cases}$$

(vista anche in E11.19) non è analitica.

E14.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: *.`
`Note:`*Esercizio 2 del compito Marzo 2010.*
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\forall x \in I, \forall k \ge 0$, si ha $f^{(k)}(x) \ge 0$: si mostri che f è analitica. *(Svolto il 10 Mag)*

Si veda anche l'esercizio E11.26.

E14.3 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ si mostri che è analitica su tutto $\mathbb{R}$, ma il raggio di convergenza dello sviluppo centrato in x_0 è $\sqrt{1+x_0^2}$. *(Svolto il 10 Mag)*

E14.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Sia $b_n = \sup_{x\in I} |f^{(n)}(x)| = \|f^{(n)}\|_\infty$; se $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}\frac{1}{n} < \infty$ allora f è analitica.
Mostrate con un semplice esempio che la richiesta non è necessaria

E14.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Esercizio 1 Compito 30 Giugno 2017.*
Sia f una funzione continua sull'intervallo $[0,1]$. Si dimostri che la funzione

$$F(t) = \int_0^1 f(x)e^{tx}\,\mathrm{d}x$$

è analitica su $\mathbb{R}$.

15 Curve

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 15.1 *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.*

- *Una funzione continua $\gamma : I \to X$ è detta **curva parametrica**, o più semplicemente nel seguito* curva.
- *Se γ è iniettiva si dice che la curva è **semplice**.*
- *Se $X = \mathbb{R}^n$ e γ è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, allora γ è detta una **curva immersa** o **curva regolare**.* [74]

Rimandiamo lo studio delle curve chiuse alla prossima sezione.

Si usa anche il termine *arco* come sinonimo di *curva*; questo termine viene prevalentemente usato quando la curva non è (necessariamente) chiusa.

Riportiamo due nozioni di equivalenza di curve. La prima si trova come definizione 5.54 nel capitolo 5 dagli appunti 2015/16.

Definizione 15.2 *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli. Siano $\gamma : I \longrightarrow X$ e $\delta : J \longrightarrow X$ due curve. Si pone $\gamma \sim \delta$ se esiste un omeomorfismo* [75] *crescente $\varphi : I \longrightarrow J$ tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.*

La seconda è la definizione 7.16 dal capitolo 7 dagli appunti 2015/16.

Definizione 15.3 *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli. Siano $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\delta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari. Si pone $\gamma \approx \delta$ se esiste un diffeomorfismo* [76] *crescente $\varphi : I \longrightarrow J$ tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.*

E15.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione. Mostrate che f è continua se e solo se, per ogni curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ si ha che $f \circ \gamma$ è continua.

E15.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Supponiamo che I sia un intervallo chiuso e limitato; usate l'esercizio E5.83 per mostrare che un arco $\gamma : I \to X$ semplice è un omeomorfismo con la sua immagine.

E15.6 `Argomenti: . Prerequisiti: E15.5. Difficoltà: *.`
Presa una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definiamo nel seguito $\hat{I} = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$ e $\hat{\gamma} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ tramite $\hat{\gamma}(t) = \gamma(-t)$.

Vogliamo mostrare che, in certe ipotesi, due curve hanno lo stesso sostegno se e solo se sono equivalenti.

- Siano $\gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ archi semplici ma non chiusi e con lo stesso sostegno. Mostrate che se $\gamma(0) = \delta(t)$ allora $t = 0$ oppure $t = 1$. Nel caso $\gamma(0) = \delta(0)$, mostrate che $\gamma \sim \delta$. Se invece $\gamma(0) = \delta(1)$ allora $\hat{\gamma} \sim \delta$.
- Siano $\gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ archi semplici e immersi ma non chiusi e con lo stesso sostegno, e sia $\gamma(0) = \delta(0)$: mostrate che $\gamma \approx \delta$. Se invece $\gamma(0) = \delta(1)$ allora $\hat{\gamma} \approx \delta$.

(Per il caso di curve chiuse si veda E15.19)

E15.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Mostrate che $[0, 1]$ e $[0, 1]^2$ non sono omeomorfi.

E15.8 `Argomenti: . Prerequisiti: Es. E5.83 e E15.7. Difficoltà: .`
Mostrate che non si può trovare una curva $c : [0, 1] \to [0, 1]^2$ continua e bigettiva: dunque la curva di Peano non è iniettiva.

E15.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*Nice formula taken from [11].*
Let $S = S(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ be the unit sphere $S = \{x : |x| = 1\}$. Let $v, w \in S$ with $v \neq w$ and $v \neq -w$; *(Svolto il 24 Mag)*

[74] Negli appunti 2015/16 si usa *curva regolare*.
[75] Un omeomorfismo è una funzione bigettiva $\varphi : I \longrightarrow J$ continua con inversa continua.
[76] Un diffeomorfismo è una funzione bigettiva $\varphi : I \longrightarrow J$ di classe C^1, la cui inversa è di classe C^1; in particolare φ' non è mai nulla, e (quando dominio e codominio sono intervalli) ha sempre lo stesso segno.

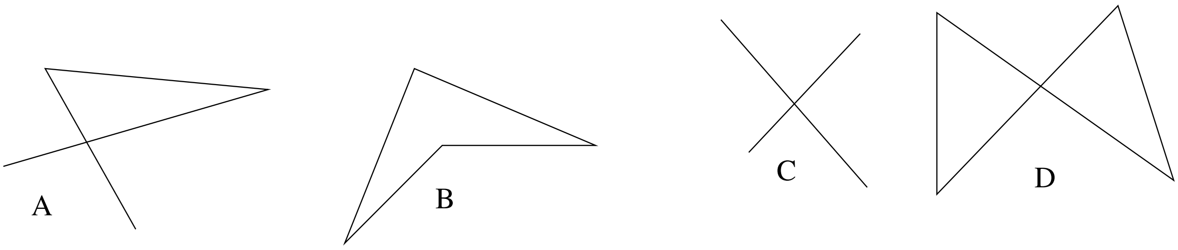


Figure 2: Insiemi dell'esercizio E15.11

let $T = \arccos(v \cdot w)$ so that $T \in (0, \pi)$; then the geodesic (that is, the arc-parameterized minimal length curve) $\gamma(t) : [0, T] \to S$ connecting v to w inside S is

$$\gamma(t) = \frac{\sin(T-t)}{\sin(T)} v + \frac{\sin(t)}{\sin(T)} w \quad ,$$

and its length is T.
(You may assume that, when $v \cdot w = 0$ that is $T = \pi/2$, then the geodesic is $\gamma(t) = v\cos(t) + w\sin(t)$).

15.1 Curve chiuse

Aggiungiamo altre definizioni a quelle già viste in 15.1.

Definizione 15.10 *Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $\gamma : I \to X$ una curva parametrica.*

- *Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ si dice che la curva è **chiusa**;*
- *inoltre si dice che la curva è **semplice e chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e γ è iniettiva quando ristretta a $[a, b)$.* [77]
- *Se $X = \mathbb{R}^n$ e γ è di classe C^1 e è chiusa si assume ulteriormente che $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.*

E15.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Consideriamo i sottoinsiemi del piano delle seguenti figure 2: quali possono essere sostegno di una curva semplice? oppure di una curva chiusa semplice? oppure unione di sostegni di due curve semplici (possibilmente chiusi)? *(Dimostrate le vostre affermazioni.)*

E15.12 Sia $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva chiusa, mostrate che ammette un' estensione $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to X$ continua e periodica di periodo 1.

E15.13 Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ una curva chiusa di classe C^1, mostrate che ammette un' estensione $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ periodica di periodo 1 e C^1.

E15.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Useremo le definizioni e i risultati della Sezione 5.12, in particolare E5.133.

Data $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to X$ continua e periodica di periodo 1, possiamo definire la mappa $\hat{\gamma} : S^1 \to X$ tramite la relazione

$$\hat{\gamma}\Big((\cos(t), \sin(t))\Big) = \tilde{\gamma}(t) \ .$$

Mostrate che questa è una buona definizione, e che $\hat{\gamma}$ è continua.

Usate l'esercizio E5.83 per mostrare che ogni arco semplice chiuso, se visto equivalentemente come mappa $\hat{\gamma} : S^1 \to X$, è un omeomorfismo con la sua immagine.

Nel seguito useremo mappe periodiche per rappresentare le curve chiuse.

[77] Cioè, non si richiede la iniettività negli estremi.

E15.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Adattate la nozione di equivalenza 15.2 al caso di archi semplici e chiusi, vedendoli però come mappe $\gamma : \mathbb{R} \to X$ continue e periodiche di periodo 1; quali ipotesi richiediamo alle mappe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

E15.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano γ, δ curve chiuse, ma viste come mappe definite su $\mathbb{R}$ e continue e periodiche di periodo 1.

Vediamo una nuova relazione: si ha $\gamma \sim_f \delta$ sse esiste un omeomorfismo crescente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per cui $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza. Confrontatela con la relazione $\sim$.

E15.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano γ, δ curve chiuse e immerse, ma viste come mappe definite su $\mathbb{R}$ e C^1 e periodiche di periodo 1.

Vediamo una nuova relazione: si ha $\gamma \approx_f \delta$ sse esiste un diffeomorfismo crescente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per cui $\gamma = \delta \circ \varphi$

Mostrate che questa è una relazione di equivalenza. Confrontatela con la relazione $\approx$.

E15.18 Date un semplice esempio di curve chiuse immerse per cui si ha $\gamma \approx_f \delta$ ma non $\gamma \approx \delta$.

E15.19 `Argomenti: . Prerequisiti: E15.5. Difficoltà: *.`
Siano $\gamma, \delta : S^1 \to \mathbb{R}^n$ curve chiuse semplici e immerse e con lo stesso sostegno; poniamo $\hat\gamma(t) = \gamma(-t)$: mostrate che o $\gamma \approx_f \delta$ oppure $\hat\gamma \approx_f \delta$.

Altri esercizi riguardo alle curve sono E5.148, E9.16, E11.52 e E19.4; si veda inoltre la Sezione 18.4.

16 Campi vettoriali

E16.1 `Argomenti: .Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*ese 4 compito 20 Giugno 2017.* *(Svolto il 24 Mag)*
Sia F un campo vettoriale continuo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tale che, per ogni $x \neq 0$, $F(x)$ è un multiplo scalare di x. Per $r > 0$, indichiamo con S_r la sfera di raggio r centrata in 0.

- Si dimostri che, per ogni arco regolare γ con sostegno contenuto in una sfera S_r , si ha $\int_\gamma F = 0$.
- Si dimostri che, se un tale campo F è conservativo, allora $|F(x)|$ è costante su ogni sfera S_r, e dunque che $F(x) = x\rho(|x|)$ con $\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continua.

17 Superfici

E17.1 `Argomenti: . Prerequisiti: 11.44. Difficoltà: .`
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1; sia $\tilde x \in A$ t.c. $f(\tilde x) = 0$, e $\nabla f(\tilde x) \neq 0$: per il teorema di funzione implicita 11.44 l'insieme $E = \{f = 0\}$ è un grafico in un intorno di $\tilde x$, e il piano tangente a questo grafico è l'insieme degli x per cui

$$\langle x - \tilde x, \nabla f(\tilde x)\rangle = 0 \ .$$

Confrontate questo risultato col Lemma 7.19 negli appunti: "il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello".

E17.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Dato $m > 0$, mostrate che la relazione $xyz = m^3$ definisce una superficie. Provate che i piani tangenti alla superficie nei punti del primo ottante formano con i piani coordinati di $\mathbb{R}^3$ un tetraedro di volume costante.

E17.3 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $a > 0$. Mostrare che la relazione $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ definisce una superficie regolare dentro l'ottante $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Provare che i piani tangenti alla superficie tagliano i tre assi coordinati in tre punti la somma delle cui distanze dall'origine è costante.

E17.4 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Determinare fra i triangoli iscritti nel cerchio unitario quello di area massima.

E17.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano $a > 0, b > 0, c > 0$. Si determini un piano tangente all'ellissoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

in un punto con $x, y, z > 0$, in modo che il tetraedro delimitato da questo piano e dai piani coordinati abbia volume minimo.

18 Equazioni differenziali

E18.1 Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .
Per ogni punto (x, y) del piano con $x, y > 0$ passa un'unica ellissi $4x^2 + y^2 = a$ (con $a > 0$). Descrivete la famiglia di curve che in ogni punto sono ortogonali all'ellisse passante per quel punto. Si veda la figura 3.

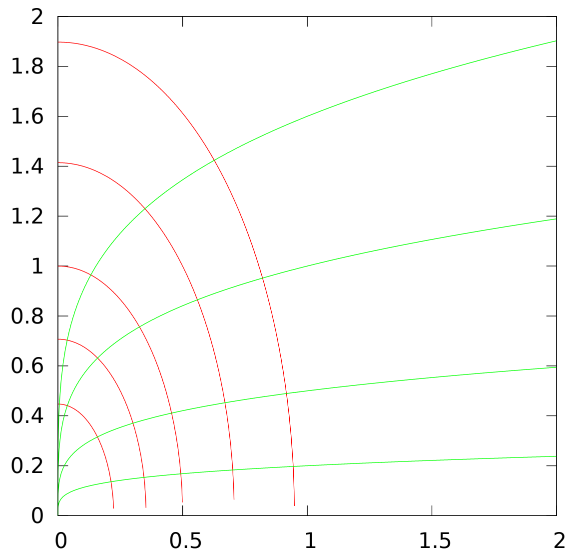


Figure 3: Ellissi (in rosso) e curve a esse ortogonali.

E18.2 Argomenti: . Prerequisiti: E11.3. Difficoltà: .
Sia I intervallo aperto. Sia $F : I \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ funzione continua positiva, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile che risolve l'equazione differenziale $(f'(x))^2 = F(x, f(x))$: mostrate allora che x è sempre crescente, nel qual caso si ha $f'(x) = \sqrt{F(x, f(x))}$ per ogni x, oppure è sempre decrescente, nel qual caso si ha $f'(x) = -\sqrt{F(x, f(x))}$; e che dunque f è di classe C^1.

E18.3 Argomenti: . Prerequisiti: E18.2. Difficoltà: .
Descrivete tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili che risolvono

$$\forall x\,,\ (f'(x))^2 + (f(x))^2 = 1\,.$$

Mostrate che se $-1 < f(x) < 1$ per $x \in I$ intervallo aperto allora si ha che f è un arco di sinusoide per $x \in I$.

Mostrate che tutte le soluzioni sono C^1, e che sono C^∞ a tratti.

Vedrete che $f \equiv 1$ e $f \equiv -1$ sono inviluppi delle altre soluzioni, come spiegato nella sezione 18.4.

E18.4 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(x) = f(x)f''(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$. Si provi che la funzione f è identicamente nulla.

18.1 Problemi autonomi

E18.5 Argomenti: . Prerequisiti: E10.3. Difficoltà: .
Siano dati $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata e continua con $f(x_0) = 0$ ma $f(x) > 0$ per $x \neq x_0$. (Svolto il 31 mag)
Vogliamo studiare il problema autonomo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \ , \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases}$$

Notate che $x \equiv x_0$ è una possibile soluzione. Mostrate che se, per $\varepsilon > 0$ piccolo, [78]

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{f(y)}\, \mathrm{d}y = \infty \tag{18.1}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{1}{f(y)}\, \mathrm{d}y = \infty \tag{18.2}$$

allora $x \equiv x_0$ è l'unica soluzione; mentre in caso contrario esistono molte soluzioni di classe C^1: descrivetele tutte.

Le condizioni (18.1) e (18.2) sono un caso particolare della *condizione di unicità di Osgood*.

E18.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $\alpha > 1$ e sia

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \ , \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ fissati. Mostrate che si ha esistenza e unicità della soluzione; calcolate l'intervallo massimale; usate il metodo di separazione delle variabili per calcolare esplicitamente le soluzioni. (Essendo la equazione autonoma, si potrebbe assumere che $t_0 = 0$, ma l'esempio risulta forse più chiaro con un t_0 generico).

E18.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Cosa succede nell'esercizio precedente nel caso $\alpha \in (0, 1)$?

E18.8 `Argomenti: . Prerequisiti: E18.6. Difficoltà: .`
Sia $\alpha > 1$ e sia

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \ , \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

abbiamo visto in E18.6 che questo ammette una soluzione globale $x(t)$; mostrate che, per ogni fissato t, $\lim_{\alpha\to 1+} x(t) = e^t$.

Notate che e^t è la unica soluzione di $x'(t) = |x(t)|$ con $x(0) = 1$.

18.2 Risoluzione

E18.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia data $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; trovate le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolvono

$$\forall x \neq 0\, , \ f'(x) = \Theta\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

(Sugg. si effettui il cambio di variabili $f(x) = xh(x)$ e si trovi e risolva un'equazione differenziale per $h(x)$.)

E18.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Trovate le soluzioni del problema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$$

con la sostituzione $z = y/x$, e anche confrontandolo col problema

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y} \ .$$

[78] Se la condizione vale per un $\varepsilon > 0$ allora vale per ogni $\varepsilon > 0$, dato che $f > 0$ lontano da x_0.

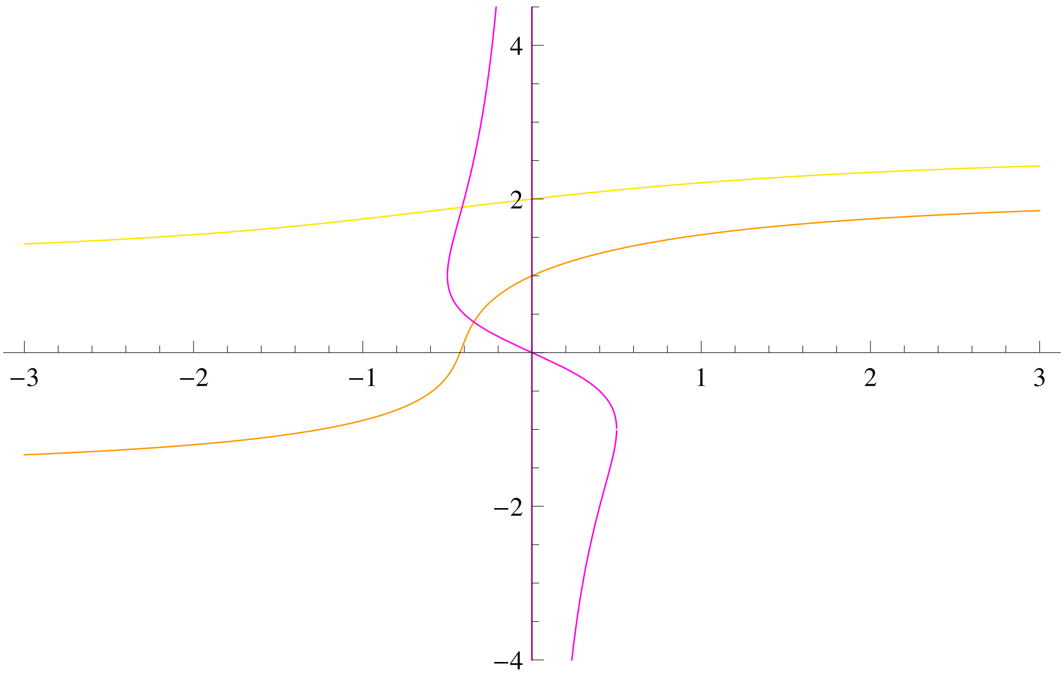


Figure 4: Esercizio E18.13. In viola la linea dei flessi. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

18.3 Discussioni qualitative

Per i successivi esercizi può essere utile il seguente semplice lemma di confronto.

Lemma 18.11 *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, siano $f, g : U \to \mathbb{R}$ continue con $f \geq g$; sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto con $t_0 \in I$ continue e siano $x, w : I \to \mathbb{R}$ soluzioni di*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad w(t) = g(t, w(t))$$

con $x(t_0) \geq w(t_0)$: allora $x(t) \geq w(t)$ per $t \geq t_0$. Basta infatti notare che $x'(t) \geq w'(t)$ e dunque $x(t) - w(t)$ è crescente.

(Vi sono versioni molto più raffinate di questo lemma, si veda negli appunti del corso).

E18.12 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Discutete le soluzioni di *(Svolto il 31 mag)*

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x) - x)^3 \\ y(0) = a \ . \end{cases}$$

studiate in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità.

E18.13 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x)^2 + x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Mostrate che esiste unica la soluzione globale $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e che y è limitata e esistono finiti i limiti $\lim_{x\to\infty} y(x)$, $\lim_{x\to-\infty} y(x)$.

E18.14 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Discutete l'equazione differenziale *(Svolto il 31 mag, cenni)*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x) - x^2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

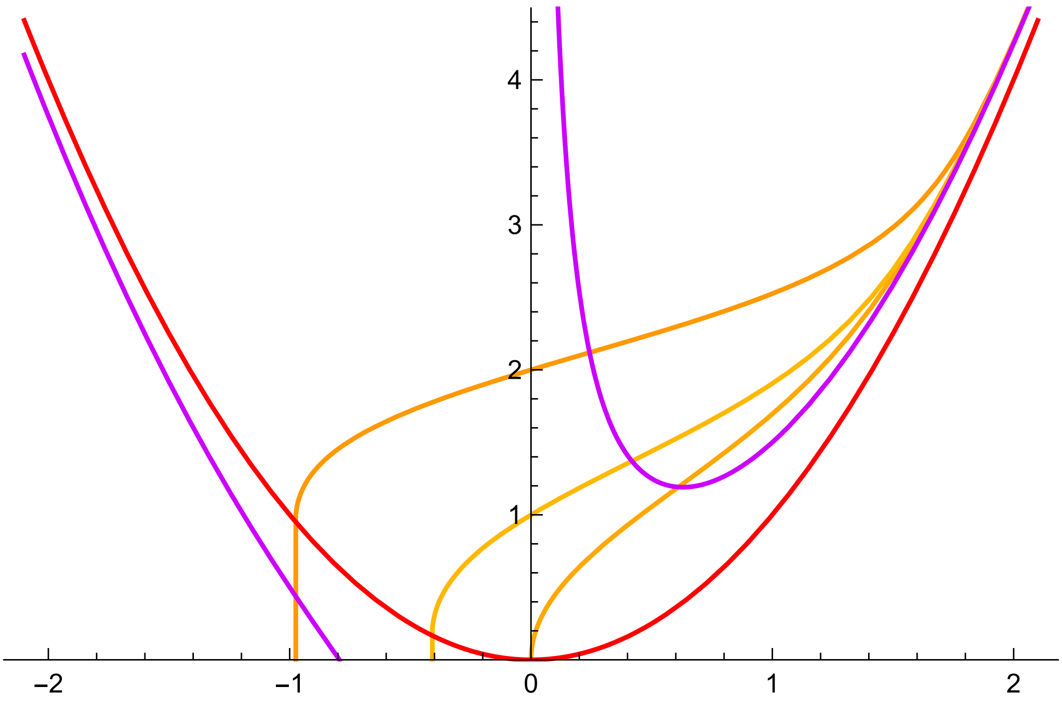


Figure 5: Esercizio E18.14. Soluzioni per $a > 0$. In viola la linea dei flessi. In rosso la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. In giallo le soluzioni con dati iniziali $y(0) = 2$, $y(0) = 1$, $y(0) = 1/1000$.

per $a \neq 0$, studiando in modo qualitativo l'esistenza (locale o globale) delle soluzioni, e le proprietà di monotonia e convessità/concavità. [79]

Mostrate che la soluzione esiste per tutti i tempi positivi.

Mostrate che per $a > 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi.

$\star$ Mostrate che esiste un $\tilde{a} < 0$ critico tale che, per $\tilde{a} < a < 0$ la soluzione non si estende a tutti i tempi negativi, mentre per $a \leq \tilde{a}$ la soluzione esiste per tutti i tempi negativi; inoltre per $a = \tilde{a}$ si ha $\lim_{x \to -\infty} y(x) - x^2 = 0$.

E18.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*ese 4 compito 9 Luglio 2011*.

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(y(x) - x^2) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y = y(x)$, definita su tutto $\mathbb{R}$ e tale che

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} y(x) = 0 \quad .$$

[79] L'equazione differenziale è tratta dall'esercizio 13 in [1].

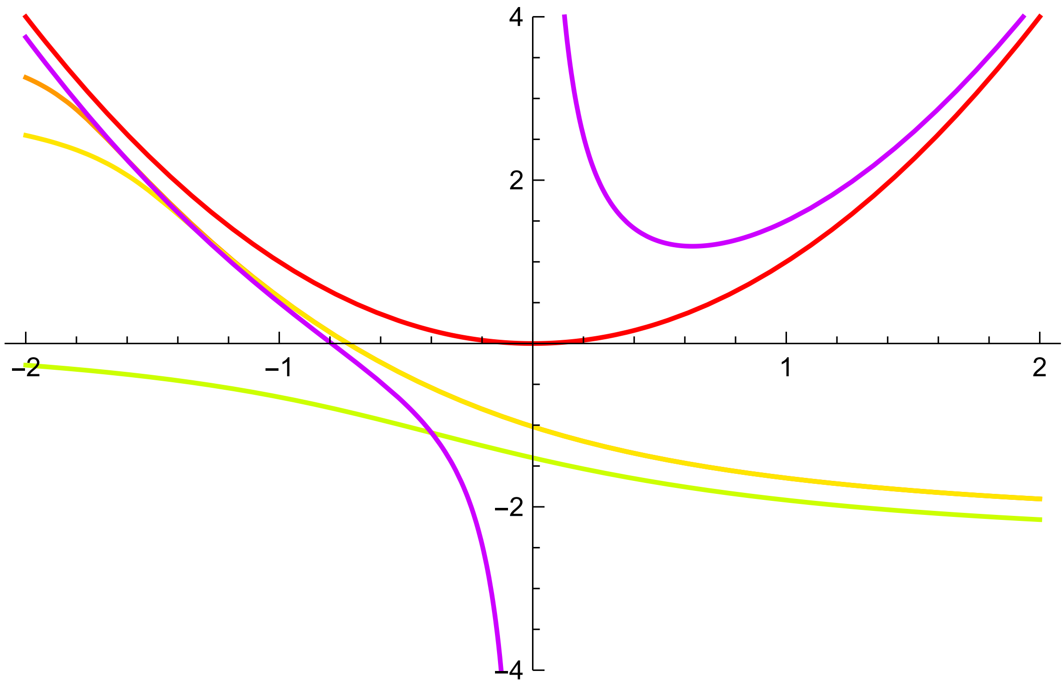


Figure 6: Esercizio E18.14. Soluzioni per $a < 0$. In viola la linea dei flessi. In rosso la parabola dove la derivata della soluzione è infinita. Sono disegnate le soluzioni con dati iniziali $a = -1.4$ ("verde"), $a = -1.0188$ ("arancione") e $a = -1.019$ ("gialla"). Notate che queste ultime si differenziano solo per $0,0002$ come dati iniziali, sono indistinguibili nel grafico per $x > -1$, ma poi per $x < -1$ si allontanano velocemente, e per per $x = -2$ valgono rispettivamente 3.25696 e 2.54856, con una differenza di circa $0,7$!

18.4 Inviluppo

Data una famiglia di curve planari, vogliamo definire la *curva inviluppo*. Vediamo due possibili definizioni.

- Se le curve nel piano sono descritte dall'equazione in forma implicita $F(x, y, a) = 0$ allora l'inviluppo si ottiene ricavando la a dalla equazione $\frac{\partial}{\partial a} F(x, y, a) = 0$ e sostituendola nella $F(x, y, a) = 0$.
- Per semplicità, consideriamo curve che sono funzioni dell'ascissa. Sia $y = f(x, a) = f_a(x)$ una famiglia di funzioni, con $x \in I, a \in J$ (intervalli aperti), allora $y = g(x)$ **è l'inviluppo di** f_a se il grafico di g è coperto dall'unione dei grafici delle f_a e la curva g è tangente a ogni f_a laddove la tocca; più precisamente, per ogni $x \in I$ esiste $a \in J$ per cui $g(x) = f(x, a)$, e per ogni scelta di a che soddisfa $g(x) = f(x, a)$ si ha $g'(x) = f'(x, a)$.

La curva inviluppo ha una importante proprietà nel campo delle equazioni differenziali. Supponiamo infatti che $y = f_a(x)$ siano soluzioni della equazione differenziale $\Phi(y', y, x) = 0$: allora anche g è soluzione (verifica immediata). [80]

Vogliamo vedere che le due precedenti definizioni sono equivalenti, in questo senso.

E18.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Partiamo dalla prima definizione. Supponete che in un punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a})$ si abbia che $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ e anche $\frac{\partial^2 F}{\partial aa} \neq 0$. Fissato a, si può esprimere $E_a = \{(x, y) : F(x, y, a) = 0\}$ localmente come grafico $y = f(x, a) = f_a(x)$. Usiamo inoltre l'ipotesi $\frac{\partial^2 F}{\partial aa} \neq 0$ per esprimere localmente $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ come grafico $a = \Phi(x, y)$. Definito $G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y, \Phi(x, y))$, mostrate che $G = 0$ può essere rappresentato come $y = g(x)$. Mostrate infine che g è l'inviluppo delle curve f_a.

E18.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Nelle ipotesi precedenti, supponendo che $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial aa} > 0$, mostrate che il grafico dell'inviluppo g è localmente il "bordo" dell'unione dei grafici delle f_a nel senso che $g(x) \geq f_a(x)$ con uguaglianza per un solo a.

E18.18 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*Dal testo [5], a pg 84.*.

Consideriamo le curve

$$y = f(x, a) = ax + \frac{a^2}{2}$$

- Trovate un equazione differenziale risolta da tutte le curve. *(Sugg. Si elimini a dal sistema $y = f, y' = \frac{\partial}{\partial x} f$. Il risultato può essere lasciato in forma non normale.)*
- Calcolate l'inviluppo; verificate che soddisfa la equazione differenziale prima ottenuta.

Si veda anche la figura 7.

E18.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`.

Consideriamo le ellissi $ax^2 + y^2/a = 2$ (con $a > 0$).

- Trovate la regione del piano coperta da queste ellissi.
- Mostrate che il bordo di questa regione è l'inviluppo delle ellissi.

[80] Con le equazioni in forma normale però questa nozione non è interessante perché si ha unicità locale e allora non vi possono essere soluzioni speciali; cioè se $g = f_a$ $g' = f'_a$ in un punto x allora coincidono in un intorno.

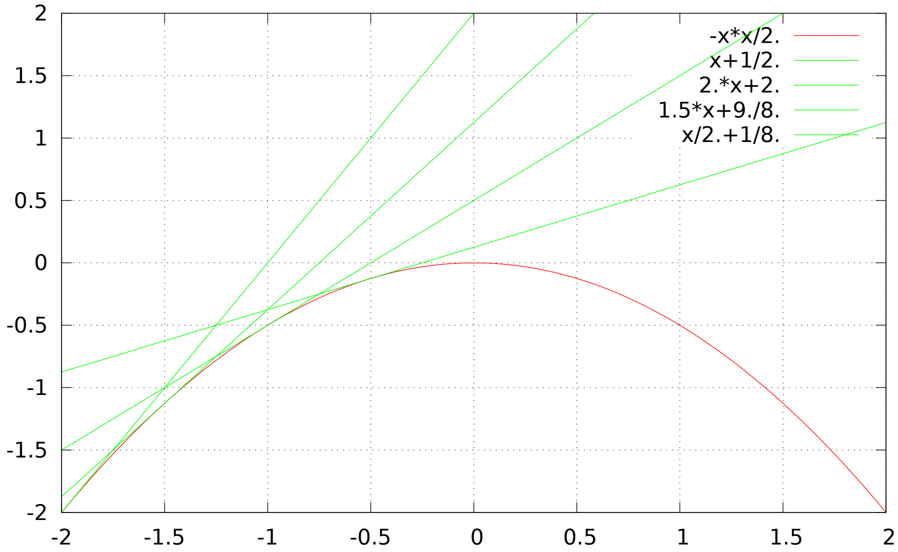


Figure 7: Inviluppo.

18.5 Equazioni lineari (a coefficienti costanti)

Indichiamo formalmente con D l'operazione *"calcolo della derivata"*. Dato un polinomio $p(x)$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(che ha coefficienti $a_i \in \mathbb{C}$, costanti) costruiamo formalmente l'operatore lineare

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... a_1 D + a_0$$

che trasforma una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^{n+K} nella funzione $p(D)f$, di classe almeno C^k, definita puntualmente da

$$[p(D)f](x) \stackrel{\text{def}}{=} a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + ... a_1 f'(x) + a_0 f(x)$$

E18.20 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dati due polinomi $p(x), q(x)$ e il polinomio prodotto $r(x) = p(x)q(x)$, mostrate che $p(D)[q(D)f] = r(D)f$

E18.21 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Posta $f(x) = e^{\lambda x}$, notate che

$$[p(D)f](x) = p(\lambda).f(x)$$

Possiamo dunque considerare gli esponenziali $e^{\lambda x}$ come autovettori di $p(D)$, con autovalore $p(\lambda)$.

E18.22 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Sia f una funzione di classe C^n, sia $\theta \in \mathbb{C}$ costante e sia $g(x) = e^{\theta x}f(x)$. Mostrate che se p è un polinomio e $q(x) = p(x+\theta)$, allora

$$p(D)g = e^{\theta x}[q(D)f] \,.$$

Notate che possiamo scrivere la relazione anche come un "coniugio"

$$e^{-\theta x}[p(D)[e^{\theta x}f]] = p(D+\theta)f \,.$$

E18.23 `Argomenti: . Prerequisiti: E18.22. Difficoltà: .`

Dati $\theta \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$, posto $p(x) = (x-\theta)^k$, mostrate che $p(D)f = 0$ se e solo se $f(x) = r(x)e^{\theta x}$ con r polinomio di grado al più $k-1$.

E18.24 `Argomenti: . Prerequisiti: E10.1, E18.22. Difficoltà: .`

Siano dati $\theta, \tau \in \mathbb{C}$ con $\theta \neq \tau$, $q(x)$ un polinomio, e $k \in \mathbb{N}$; poniamo $p(x) = (x-\theta)^k$ e $h(x) = e^{\tau x}q(x)$. Mostrate che $p(D)f(x) = h(x)$ se e solo se $f(x) = r(x)e^{\theta x} + \tilde{q}(x)e^{\tau x}$ con r polinomio di grado al più $k-1$ e $\tilde{q}$ polinomio dello stesso grado di q.

E18.25 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Dati $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$ costanti, con $a_n \neq 0$, e posto $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_1 x + a_0$, descrivete tutte le possibili soluzioni f di

$$p(D)f = 0 \,.$$

Mostrate che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale (basato sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi) di dimensione n.

(Sugg. fattorizzate il polinomio e sfruttate gli esercizi precedenti).

E18.26 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Con p come sopra, analizzate inoltre il problema

$$p(D)f = e^{\alpha x}$$

(con $\alpha \in \mathbb{C}$ costante).

Cosa succede quando α si avvicina a una radice del polinomio p?

E18.27 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Data $h = h(x)$, e $\theta \in \mathbb{R}$, risolvete le equazioni differenziali

$$(D-\theta)f(x) = h(x)$$

$$(D-\theta)^2 f(x) = h(x)$$

$$(D^2+\theta^2)f(x) = h(x)$$

$$(D^2-\theta^2)f(x) = h(x)$$

e i casi particolari

$$(D-1)f(x) = x^k$$

$$(D-\theta)f(x) = e^{\alpha x}$$

(con $\alpha \in \mathbb{C}$, e $k \in \mathbb{N}$, costanti).

18.6 Equazioni matriciali

Per risolvere i seguenti esercizi bisogna conoscere le proprietà elementari dell'esponenziale di matrici, si veda in sezione 13.3.

E18.28 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.21,E13.20. Difficoltà: .`
Date $A, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continua, risolvete la equazione

$$X' = AX + F \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$. *(Sugg. usate il metodo di variazione delle costanti: sostituite $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$)*

E18.29 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.21,E13.20. Difficoltà: ⋆.`
Date $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, risolvete la equazione

$$X' = AX + XB \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$

E18.30 `Argomenti: . Prerequisiti: E6.22,E13.21,E13.20. Difficoltà: ⋆.`
Sia $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e siano $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ curve continue nello spazio delle matrici.

- Definite ricorsivamente $Q_0 = C$, e

$$Q_{n+1}(s) = \int_0^s A(\tau)Q_n(\tau)B(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

mostrate che la serie seguente converge totalmente:

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) \ .$$

- Mostrate che la funzione appena definita è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t)B(t) \quad , \quad Y(0) = C \ .$$

- Sia $B \equiv$Id; posto $d(t) = \det(Y(t))$ e $a(t) = \mathrm{traccia}(A(t))$ mostrate che

$$d'(t) = a(t)d(t) \ .$$

Se C è invertibile se ne deduce che d non si annulla mai, e dunque che Y è sempre invertibile.

E18.31 `Argomenti: . Prerequisiti: E13.21,E13.20,E18.30. Difficoltà: .`
Siano date $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $F, A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continue, e la soluzione $Y(t)$ della equazione

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t) \quad , \quad Y(0) = \mathrm{Id} \ .$$

Risolvete la equazione

$$X' = AX + F \ , X(0) = C \ ,$$

dove $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ usando $Y(t)$ come funzione ausiliaria.

19 (pseudo)compit(in)i

E19.1 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*compito 26 Gennaio 2016.*

Sia $(q_n)_{n\geq 1}$ una enumerazione dei razionali di $(0,1)$ e definiamo

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n:q_n<t} 2^{-n}$$

per $t \in (0,1)$.

Mostrate che f è strettamente crescente. Calcolate i limiti per $t \downarrow 0$ e $t \uparrow 1$. Mostrate inoltre che f è discontinua in t se e solo se $t \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Cosa cambia se sostituiamo 2^{-n} con il termine a_n di una serie assolutamente convergente?

E19.2 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*compito 23 giugno 2012.*

Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$, con $f(0) \neq 0$. Si dimostri che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che i due vettori *(Svolto il 10 Mag)*

$$v = (x, f(x)) \quad , \quad w = (-f'(x), 1)$$

siano linearmente dipendenti. Si discuta la possibilità che questa condizione sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

E19.3 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*riadattati dal compitino 9 apr 2011.*

Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$.

- Fissato $a < f(0)$ sia M_a l'insieme degli $m \in \mathbb{R}$ tali che la retta $y = mx + a$ intersechi il grafico $y = f(x)$ della funzione f in almeno un punto: si mostri che M_a ammette minimo $\hat{m} = \hat{m}(a)$;
- si mostri che $\hat{m}$ dipende in modo continuo da a, [81]
- e che $\hat{m}(a)$ è monotona strettamente decrescente;
- se f è derivabile, si mostri che la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ è tangente al grafico in tutti i punti in cui lo incontra;
- supponiamo ulteriormente che f sia di classe C^2 e che $f''(x) > 0 \forall x > 0$ [82]; si mostri che vi è un unico punto x in cui la retta $y = \hat{m}(a)x + a$ incontra il grafico $y = f(x)$; lo chiamiamo $\hat{x} = \hat{x}(a)$;
- e mostrate che le funzioni $a \mapsto \hat{x}(a)$ e $a \mapsto \hat{m}(a)$ sono derivabili.

E19.4 `Argomenti: cerchio osculatore. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*riadattati dal compitino 9 apr 2011.*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in 0, con $f(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$. Si dimostri che esistono unici un punto $P = (a, b)$ nel piano e una costante $r > 0$, tali che *(Svolto il 10 Mag)*

$$d(\, P,\ (x, f(x))\,) = r + o(x^2),$$

determinando a, b, r in funzione di $f'(0), f''(0)$. Si intende che $d(P,Q)$ è la distanza euclidea fra due punti P, Q nel piano.

Sugg. per chiarirvi le idee, provate innanzitutto il caso in cui anche $f'(0) = 0$.

(Il grafico della funzione f è una curva nel piano; per ipotesi questa curva passa per l'origine; in questo esercizio abbiamo determinato il cerchio, di raggio r e centro P, che meglio approssima la curva nelle vicinanze dell'origine: questo cerchio è detto "cerchio osculatore", e il suo raggio si chiama "raggio di curvatura", e l'inverso del raggio è la "curvatura" della curva nell'origine.)

E19.5 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

[81] Suggerimento: ripensate all'esercizio E8.7.
[82] Usate l'esercizio precedente!

- Si verifichi che per ogni $t > 0$ l'equazione

$$\sin x = x^t$$

ammette una e una sola soluzione $x > 0$.

- Chiamata $f(t)$ tale soluzione, si determini l'immagine della funzione t e si dimostri che è strettamente crescente e continua su $(1, +\infty)$.
- Si dimostri che f si prolunga per continuità a $t = 1$ e si discuta l'esistenza della derivata destra della funzione prolungata in tale punto.

E19.6 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\cos(f(x))$ è derivabile: se ne può dedurre che f è derivabile? *Se è vero, dimostratelo; se non è vero, producete un esempio.*

E19.7 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f > 0$ e tale che $\log(f(x))$ è convessa: se ne può dedurre che f è convessa? *Se è vero, dimostratelo; se non è vero, producete un esempio.*

E19.8 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, con $g > 0$: mostrate che f/g è di classe C^∞.

E19.9 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Sia $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ con raggio di convergenza $\rho > 0$, e sia $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$; si mostri che la funzione $g(x) = f(x)/x^n$ è estendibile a $x = 0$; si mostri (l'estensione di) g coincide con una opportuna serie di potenze $g(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n x^n$; cosa si può dire del raggio di convergenza di g?

E19.10 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
Siano $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continue, e inoltre f positiva e monotona decrescente con $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mentre $\sup_{x>0} |\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t| < \infty$: mostrate allora che

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.

E19.11 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`
`Note:`*compitino 12/1/2013.*
Dato un sottoinsieme E di $\mathbb{N}$ e un intero $n \in \mathbb{N}$, l'espressione

$$\frac{\mathrm{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n + 1}$$

indica quale frazione del segmento $\{0, 1, ..., n\}$ è contenuta in E. La nozione di "densità" in $\mathbb{N}$ di E è riferita al comportamento di tali frazioni al tendere di n all'infinito. Precisamente, si definiscono la densità superiore $\overline{d}(E)$ di E e la sua densità inferiore $\underline{d}(E)$ come

$$\overline{d}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n + 1}$$

$$\underline{d}(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{card}(E \cap \{0, 1, ..., n\})}{n + 1}$$

Se $\overline{d}(E) = \underline{d}(E) = d \in [0, 1]$, si dice che E ha densità d.

(a) Si dimostri che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, l'insieme $E_\alpha = [n\alpha] : n \in N$ ha densità $d = 1/\alpha$ (il simbolo $[x]$ indica la parte intera di $x \in R$).

(b) Sia $E = \{m_0, m_1, ..., m_k, ...\}$ infinito, con $m_0 < m_1 < ... < m_k < ...$ Si dimostri che $\overline{d}(E) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$ e $\underline{d}(E) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{m_k}$

(c) *(facoltativo)* Si trovi un insieme E con $\overline{d}(E) = \overline{d}(\mathbb{N} \setminus E) = 1$.

E19.12 `Argomenti: punti isolati. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*esercizio 6 nel compito del 13/1/2011.*

Ogni numero intero $n \geq 1$ si decompone in modo unico come $n = 2^k d$, con $k \in N$ e d intero dispari. Si consideri la successione $a_n = d/2^k$ e se ne determinino

(a) limite superiore e inferiore;

(b) l'insieme dei punti limite.

E19.13 `Argomenti: matrice,determinante. Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*esercizio 4 nello pseudocompitino del 14/3/2013.*

(Svolto il 24 Mag ◊)

(a) Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice 2 per 2 ; identificando $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con $\mathbb{R}^4$ si calcoli il gradiente del determinante e si verifichi che è nonnullo se e solo se la matrice è non nulla.

⋆(b) Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.

E19.14 `Argomenti: matrice,determinante. Prerequisiti: . Difficoltà: ⋆.`

Vogliamo generalizzare i risultati del precedente esercizio al caso di matrici $n \times n$. *(Svolto il 24 Mag)*

Ricordiamo le seguenti proprietà del determinante delle matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Il rango è la dimensione dell'immagine di A (vista come applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$) ed è anche il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in A.
- A ha rango n se e solo $\det(A) \neq 0$.
- Se si scambiano due colonne in A, il determinante cambia di segno;
- se si somma a una colonna un multiplo di un altra colonna il determinante non cambia.
- La caratterizzazione del rango tramite i minori, [83] *«Il rango di A è pari al massimo ordine di un minore invertibile di A»*;
- lo sviluppo di Laplace per il determinante [84] *«Scelta una colonna, la j-esima, il determinante si calcola tramite la formula:* $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} C_{i,j}$ *dove* $C_{i,j}$ *(detto "cofattore") è dato da* $(-1)^{i+j}$ *per il determinante del minore di ordine* $n-1$ *ottenuto dalla matrice A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima. »*
- Il determinante di A è uguale al determinante della trasposta; dunque ogni risultato precedente vale se si legge "riga" invece di "colonna".

Mostrate i seguenti risultati.

(a) Mostrate che il gradiente della funzione $\det(A)$ è nonnullo se e solo se il rango di A è almeno $n-1$.

(b) Sia Z l'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$ con determinante nullo; mostrate che è un chiuso con parte interna vuota.

(c) Sia $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A)$, sia B una matrice fissata di rango al più $n-2$, mostrate che la tesi del teorema è falsa negli intorni U_B della matrice B, nel senso che $Z \cap U_B$ non è contenuto in una superfice[85].

E19.15 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

Si mostri la disuguaglianza di Young: dati $a, b > 0$, $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ allora

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{19.1}$$

con uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$; usando un opportuno studio di funzione. Si veda anche E9.42.

19.1 Equazioni funzionali

E19.16 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*ese 1 compito 7 Giugno 2010.*

Si dimostri che esiste una e una sola funzione continua f sull'intervallo $[-1,1]$ tale che *(Svolto il 24 Mag)*

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} f(x^2) \quad \forall x \in [-1,1] \quad .$$

Si dimostri che f è rappresentabile come serie di potenze centrata in zero; e che il raggio di convergenza è uno.

E19.17 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà:` $\star$.

`Note:`*ese 3 compito 30 Giugno 2017.*

Si consideri il problema (non di Cauchy) *(Svolto il 24 Mag)*

$$\begin{cases} y'(x) = y(x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Si dimostri che per ogni $r < 1$ esiste un'unica soluzione definita su $I = (-r, r)$ e si deduca che lo stesso vale per $r = 1$.
- Si dimostri che la soluzione è rappresentabile come somma di una serie di potenze centrata in 0 e convergente sull'intervallo $[-1, 1]$.

E19.18 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*ese 3 compito 23 Giugno 2012.*

Si dimostri che esiste una e una sola funzione f continua sull'intervallo $[0,1]$ che soddisfi la condizione *(Proposto il 24 Mag ◊)*

$$f(x) = \sin(x) + \int_0^1 \frac{f(t)}{x^2 + t^2 + 1} \, \mathrm{d}t \quad \forall x \in [0,1] \quad .$$

E19.19 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

`Note:`*ese 4 compito 23 Giugno 2012.*

Una funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$, analitica in un intorno di 0, soddisfa sul suo dominio le condizioni *(Proposto il 24 Mag)*

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + f(-x) \\ f(0) = c \end{cases} \quad ;$$

(si noti che questo non è un problema di Cauchy!). Si determini f.

$\star$ Si dimostri che la funzione trovata è l'unica soluzione derivabile in un intorno di 0 del sistema.

E19.20 `Argomenti: . Prerequisiti: . Difficoltà: .`

- Mostrate che esiste una unica $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ continua che soddisfa

$$f(x) = x \cos(f(x)) \ .$$

- Fissati a, b mostrate che esistono un numero finito di $f : (-a, b) \to \mathbb{R}$ continue soddisfacenti

$$f(x) = x \cos(f(x)) \ \forall x \in (a, b).$$

[83] `http://it.wikipedia.org/wiki/Rango_(algebra_lineare)#Criterio_dei_minori`

[84] `http://it.wikipedia.org/wiki/Determinante#Sviluppo_di_Laplace`

[85] Non vi scervellate, è più facile di quello che sembra… ci sono troppe matrici con determinante nullo vicino a B…

Index

References

[1] Emilio Acerbi, Luciano Modica, and Sergio Spagnolo. *Problemi scelti di Analisi Matematica II*. Liguori Editore, 1986.

[2] P.R. Halmos. *Naive Set Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[3] P.G. Hinman. *Fundamentals of Mathematical Logic*. Taylor & Francis, 2005.

[4] K. Knopp. *Theory and Application of Infinite Series*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.

[5] Livio C. Piccinini, Giovanni Vidossich, and Guido Stampacchia. *Equazioni differenziali ordinarie in R^N (problemi e metodi)*. Liguori Editore, 1978.

[6] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw–Hill, 3rd edition, 1964.

[7] Wikipedia. Mathematical morphology — wikipedia, the free encyclopedia, 2016. [Online; accessed 24-July-2016].

[8] Wikipedia. Tautologia — wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. [Online; in data 29-luglio-2016].

[9] Wikipedia. Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel — wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. [Online; in data 19-ottobre-2016].

[10] Wikipedia. Teoria ingenua degli insiemi — wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016. [Online; in data 18-ottobre-2016].

[11] Laurent Younes, Peter W. Michor, Jayant Shah, and David Mumford. A metric on shape space with explicit geodesics. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 19(1):25–57, 2008.

Contents

Font test: Normal Large large normalsize small scriptsize
`text tt` text roman *text emph* *text slanted* text sans serif **text boldface**
Math font test: $\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty t^{\zeta-1} e^{-t}\,dt$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \|\alpha - \beta\| \leq \delta \Longrightarrow \|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\| \leq \varepsilon$
$L^1, A \times B, A \setminus B, A \cup B, A \cap B, \bigcup_i A_i, \bigcap_i A_i, \sum_i \xi_i, \prod_j \theta_j.$
Chess: