ESERCIZI DEL TUTORATO DI FISICA MATEMATICA

GIORGIO STEFANI

SOMMARIO. I seguenti esercizi sono stati svolti durante il tutorato per il corso di Fisica Matematica dell'a.a. 2012 - 2013, tenuto dal Prof. A. Lovison. Gli esercizi sono stati scritti in LaTeX da alcuni studenti (riportati tra parentesi).

1. PRIMA PARTE

Esercizio 1.1 (G. Stefani). *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.

Svolgimento. Cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico, ovvero gli x tali che $x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = 0$. Ora il determinante di A è 5, mentre la traccia di A è 4. Il discriminante di $x^2 - 4x + 5 = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac = (-4) < 0$. Dunque otteniamo valori complessi come autovalori.

$$\lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = (2 + i), \quad \lambda_2 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = (2 - i).$$

Si tratta di autovalori complessi con parte reale positiva, dunque siamo nel caso di un *fuoco instabile*. Gli autovettori sono i vettori del nucleo di $(A - \lambda_1)$ e di $(A - \lambda_2)$; basta calcolarne uno solo, poiché l'altro è il suo coniugato.

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Otteniamo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ come autovettore relativo all'autovalore λ_1 e $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ come autovettore relativo all'autovalore λ_2. Ora per il ritratto in fase consideriamo parte reale e immaginaria di v

$$v^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In un riferimento *ideale*, in cui gli assi sono $v^{(r)}$ e $v^{(i)}$, otteniamo una spirale logaritmica che parte dall'origine e se ne allontana girando in senso orario; riportando il ritratto in fase nel riferimento usuale otteniamo una spirale *deformata* che si allontana dall'origine in senso antiorario ora, in quanto $v^{(r)}, v^{(i)}$ hanno orientazione opposta rispetto agli assi di riferimento x, y : questo si può verificare con un rapido conto:

$$Av^{(r)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice con autovalori $2 \pm i$, di autovettori $(\pm i, 1)$. Si tratta quindi di un fuoco instabile. I vettori $v^{(r)} = (0,1)$ e $v^{(i)} = (1,0)$. $\square$

Esercizio 1.2 (G. Stefani)**.** *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.

Svolgimento. Cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico, ovvero gli x tali che $x^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot x + \det(A) = 0$. Il determinante di A è 8 e la traccia di A è 5. Il discriminante di $x^2 - 5x + 8 = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$, dunque otteniamo valori complessi come autovalori:

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{-7}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{-7}}{2} = \frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$$

Si tratta di autovalori complessi con parte reale positiva, dunque è un *fuoco instabile*; gli autovettori sono i vettori del nucleo di $(A - \lambda_1)$ e di $(A - \lambda_2)$. Basta calcolarne uno solo, poi l'altro è il coniugato.

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} & -1 \\ 2 & \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix},$$

dunque $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a λ_1 e $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a λ_2. Ora per il ritratto in fase considero parte reale e immaginaria di v:

$$v^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}.$$

In un riferimento *ideale*, in cui gli assi sono $v^{(r)}$ e $v^{(i)}$, otteniamo una spirale logaritmica che parte dall'origine e se ne allontana girando in senso orario; riportando il ritratto in fase nel riferimento usuale otteniamo una spirale *deformata* che si allontana dall'origine in senso questa volta antiorario, in quanto $v^{(r)}, v^{(i)}$ hanno oreintazione opposta rispetto agli assi x, y. Questo lo si può capire anche da un semplice conto :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una matrice con autovalori $\frac{1}{2}\left(5 \pm i\sqrt{7}\right)$ di autovettori $(1 \pm i\sqrt{7}, 4)$. Si tratta quindi di un fuoco instabile. I vettori rilevanti sono $v^{(r)} = (1,4)$ e $v^{(i)} = (\sqrt{7}, 0)$. $\square$

Esercizio 1.3 (A. Florio)**.** *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.

Svolgimento. Cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico, ovvero gli x tali che $x^2 - \operatorname{tr} A\, x + \det A = 0$. Ora il determinante di A è 5, mentre la traccia di A è 4. Il discriminante di $x^2 - 4x + 5 = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac = (-4) < 0$. Dunque otteniamo valori complessi come autovalori:

$$\lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = (2 + i), \quad \lambda_2 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = (2 - i)$$

Si tratta di autovalori complessi con parte reale positiva, dunque siamo nel caso di un *fuoco instabile*. Gli autovettori sono i vettori del nucleo di $(A - \lambda_1)$ e di $(A - \lambda_2)$; basta calcolarne uno solo, poiché l'altro è il suo coniugato.

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Otteniamo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ come autovettore relativo all'autovalore λ_1 e $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ come autovettore relativo all'autovalore λ_2. Ora per il ritratto in fase consideriamo parte reale e immaginaria di v

$$v^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In un riferimento *ideale*, in cui gli assi sono $v^{(r)}$ e $v^{(i)}$, otteniamo una spirale logaritmica che parte dall'origine e se ne allontana girando in senso orario; riportando il ritratto in fase nel riferimento usuale otteniamo una spirale *deformata* che si allontana dall'origine in senso antiorario ora, in quanto $v^{(r)}, v^{(i)}$ hanno orientazione opposta rispetto agli assi di riferimento x, y : questo si può verificare con un rapido conto:

$$Av^{(r)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice con autovalori $2 \pm i$, di autovettori $(\pm i, 1)$. Si tratta quindi di un fuoco instabile. I vettori $v^{(r)} = (0, 1)$ e $v^{(i)} = (1, 0)$. □

Esercizio 1.4 (A. Florio). *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.

Svolgimento. Cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico, ovvero gli x tali che $x^2 - tr(A) \cdot x + det(A) = 0$. Il determinante di A è 8 e la traccia di A è 5. Il discriminante di $x^2 - 5x + 8 = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$, dunque otteniamo valori complessi come autovalori:

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{-7}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{-7}}{2} = \frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$$

Si tratta di autovalori complessi con parte reale positiva, dunque è un *fuoco instabile*; gli autovettori sono i vettori del nucleo di $(A - \lambda_1)$ e di $(A - \lambda_2)$. Basta calcolarne uno solo, poi l'altro è il coniugato.

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} & -1 \\ 2 & \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$$

dunque $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a λ_1 e $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a λ_2. Ora per il ritratto in fase considero parte reale e immaginaria di v:

$$v^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$$

In un riferimento *ideale* , in cui gli assi sono $v^{(r)}$ e $v^{(i)}$, otteniamo una spirale logaritmica che parte dall'origine e se ne allontana girando in senso orario; riportando il ritratto in fase nel riferimento usuale otteniamo una spirale *deformata* che si allontana dall'origine in senso questa volta antiorario, in quanto $v^{(r)}, v^{(i)}$ hanno orientazione opposta rispetto agli assi x, y. Questo lo si può capire anche da un semplice conto :

$$Av^{(r)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice con autovalori $\frac{1}{2}\left(5 \pm i\sqrt{7}\right)$ di autovettori $(1 \pm i\sqrt{7}, 4)$. Si tratta quindi di un fuoco instabile. I vettori rilevanti sono $v^{(r)} = (1, 4)$ e $v^{(i)} = (\sqrt{7}, 0)$. $\square$

2. Seconda parte

Esercizio 2.1 (G. Stefani). *Calcolare gli equilibri del sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - xy^2 \\ \dot{y} = -x - 2y + x^2 y \end{cases}.$$

Linearizzare il sistema attorno all'origine e disegnare il ritratto in fase del sistema lineare.

Svolgimento. Calcoliamo gli equilibri del sistema dato imponendo che entrambe le componenti del campo vettoriali siano nulle. Abbiamo allora

$$\begin{cases} 2x + y - xy^2 = 0 \\ -x - 2y + x^2 y = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che l'origine $(0, 0)$ è banalmente un equilibrio del sistema. Moltiplichiamo la seconda equazione per 2 e sommiamola alla prima. Otteniamo

$$\begin{cases} -3y + 2x^2 y - xy^2 = 0 \\ -x - 2y + x^2 y = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la prima equazione del sistema si fattorizza in $y(3 - 2x^2 + xy) = 0$, quindi ci sono due possibilità:

- se $y = 0$ allora, sostituendo nella seconda equazione, troviamo che $2x = 0$, da cui $x = 0$: il campo dato ha l'origine $(0, 0)$ come equilibrio, come già osservato;
- se $3 - 2x^2 + xy = 0$, allora $xy = 2x^2 - 3$, da cui, dato che deve essere $x \neq 0$, segue $y = \frac{2x^2-3}{x}$; sostituendo y nella seconda equazione troviamo che

  $$-x - 2\frac{2x^2 - 3}{x} + \frac{2x^2 - 3}{x}x^2 = 0$$

  ovvero, moltiplicando ambo i membri per x,

  $$-x^2 - 4x^2 + 6 + 2x^4 - 3x^2 = 0$$

da cui, riordinando, $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; fattorizzando il polinomio a primo membro troviamo che $(x-1)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$; ci sono dunque quattro soluzioni reali in x, e quindi quattro corrispondenti valori reali per y:

- $x_1 = 1$, da cui $y_1 = \frac{2 \cdot 1^2 - 3}{1} = -1$;
- $x_2 = -1$, da cui $y_2 = \frac{2(-1)^2-3}{-1} = 1$;
- $x_3 = \sqrt{3}$, da cui $y_3 = \frac{2(\sqrt{3})^2-3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;
- $x_4 = -\sqrt{3}$, da cui $y_4 = \frac{2(-\sqrt{3})^2-3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$;

concludiamo che il campo ha come ulteriori equilibri i quattro punti $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

Per linearizzare il sistema nell'origine è necessario calcolare la matrice Jacobiana del campo vettoriale dato. La matrice Jacobiana del campo X assegnato è

$$JX = \begin{pmatrix} 2-y^2 & 1-2xy \\ -1+2xy & -2+x^2 \end{pmatrix}$$

che calcolata nell'origine $(0,0)$ diventa

$$JX(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La linearizzazione del sistema dato attorno all'equilibrio $(0,0)$ nelle nuove coordinate (ξ,η) è allora

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -2\xi + \eta \\ \dot{\eta} = -\xi - 2\eta \end{cases}$$

Poniamo $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice del sistema linearizzato. Osserviamo che la matrice A ha traccia uguale a -4 e determinante uguale a 5. Quindi il polinomio caratteristico di A è $x^2 + 4x + 5 = 0$, che ha discriminante $\triangle = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$. Segue che l'origine è un *fuoco stabile*. Gli autovalori della matrice A sono le due soluzioni (complesse) del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i.$$

L'autovettore relativo a $\lambda_1 = -2+i$ è il vettore che genera il nucleo della matrice $A - (-2+i)I$. Abbiamo che

$$\ker(A - (-2+i)I) = \ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \ker \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle,$$

quindi l'autovettore relativo a λ_1 è $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, mentre l'autovettore relativo a λ_2 è il suo coniugato $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Dunque il vettore parte reale è $v^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il vettore parte immaginaria è $v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice di cambiamento di base è la matrice identica, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. In effetti, osserviamo che

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè A è somma di una matrice diagonale e di una matrice antisimmetrica. Quindi segue subito che

$$\exp(tA) = \exp\begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Una generica soluzione del sistema linearizzato è data dunque da

$$\begin{cases} \xi(t) = e^{-2t}(\xi_0 \cos t + \eta_0 \sin t) \\ \eta(t) = e^{-2t}(-\xi_0 \sin t + \eta_0 \cos t) \end{cases}$$

al variare del dato iniziale (ξ_0, η_0) in $\mathbb{R}^2$. Concludiamo allora che il ritratto in fase del sistema linearizzato è una spirale che si avvolge in senso orario sull'origine del piano cartesiano (ξ, η). $\square$