APPUNTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE DELLE CURVE

GIORGIO STEFANI

Abstract. Questa è una raccolta di definizioni e risultati fondamentali studiati nel corso di *Geometria Differenziale* tenuto dal Professor F. Baldassarri nel secondo semestre dell'anno accademico 2012-2013, all'interno del modulo *Geometria 2 Parte B*. Il testo di riferimento del corso e di questi appunti è M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*.

Curve parametriche

Definizione (Curva parametrizzata)**.** Una *curva parametrizzata differenziabile* è un mappa differenziabile $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, $I = (a, b)$. Scriviamo $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dove la variabile t si dice *parametro* della curva. L'insieme $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ si dice *traccia* della curva.

Definizione (Tangenza e regolarità)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata. Il vettore $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ si dice *vettore tangente* alla curva. La curva α si dice *curva regolare* se $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Se $\alpha'(t_0) = 0$, il punto $t_0 \in I$ si dice *punto singolare* della curva α.

Definizione (Lunghezza d'arco)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva. La *lunghezza d'arco* della curva α è data da

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)|| du,$$

dove $||\alpha'(t)|| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$. Diciamo che la curva α è *parametrizzata in lunghezza d'arco* se $||\alpha'(t)|| = 1$ per ogni $t \in I$.

Definizione (Prodotto scalare e vettoriale)**.** Dati due vettori

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

definiamo il *prodotto scalare* tra u e v ponendo

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}$$

e definiamo il *prodotto vettore* (o *prodotto esterno*) tra u e v ponendo

$$(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

Questa è una buona definizione del prodotto vettore perché il prodotto scalare è un'applicazione bilineare non degenere. In particolare

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione (Proprietà)**.** *Valgono allora le seguenti formule:*

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta,$$

$$|u \wedge v| = |u||v| \sin\theta,$$

dove θ è l'angolo compreso tra u e v,

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t),$$

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t),$$

il prodotto triplo

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

e infine

$$(u \wedge v) \cdot (x \wedge y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix}.$$

Definizione (Riferimento mobile di Frénet)**.** Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata con la lunghezza d'arco, $s \in I$. Il vettore unitario

$$t(s) = a'(s)$$

si dice *vettore tangente* alla curva α in s. Il numero

$$\kappa(s) = ||\alpha''(s)||$$

si dice *curvatura* della curva α in s. Il vettore unitario $n(s)$ tale che

$$\alpha''(s) = \kappa(s)n(s)$$

si dice *vettore normale* alla curva α in s. Il vettore unitario

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

si dice *vettore binormale* alla curva α in s. Segue che il vettore $b'(s)$ è parallelo al vettore $n(s)$, quindi il numero $\tau(s)$ tale che

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

si dice torsione della curva α in s. Definiamo inoltre

$< t, n >$ il *piano osculatore*,
$< t, b >$ il *piano rettificante*,
$< n, b >$ il *piano normale*.

Il triedro formato dai vettori $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ si dice *Triedro Fondamentale di Frénet.*

Proposizione (Equazioni di Frénet)**.** *Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con la lunghezza d'arco. Nelle notazioni della Definizione precedente valgono le seguenti*

Formule di Frénet

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t - \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

Definizione (Cerchio osculatore)**.** Sia $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con la lunghezza d'arco. Il numero $R = 1/\kappa$ si dice *raggio di curvatura* della curva α. Il cerchio appartenente al piano osculatore di α di centro $\alpha(s) + R(s)n(s)$ e raggio $R(s)$ si dice *cerchio osculatore* alla curva α in $s \in I$.

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE CURVE. *Date due funzioni differenziabili a valori in* $\mathbb{R}$, $\kappa(s) > 0$ *e* $\tau(s)$, *con* $s \in I$ *intervallo di* $\mathbb{R}$, *esiste una curva regolare* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ *tale che* s *sia la lunghezza d'arco,* $\kappa(s)$ *sia la curvatura e* $\tau(s)$ *la torsione di* α. *Inoltre, qualsiasi altra curva* $\widetilde{\alpha}$, *soddisfacente alle stesse condizioni, differisce da* α *per un movimento rigido* M, *cioè esistono una trasformazione ortogonale* $P \in SO(3, \mathbb{R})$ [(†)] *ed un vettore* $u \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $\widetilde{\alpha}(s) = M\alpha = P\alpha(s) + u$ *per ogni* $s \in I$.

Proposizione. *Siano* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regolare espressa in coordinate generali. Valgono le seguenti*

Formule di Frénet in coordinate generali

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\alpha'}{||\alpha'||} \\
n &= \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha'}{||\alpha' \wedge \alpha''||} \\
b &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{||\alpha' \wedge \alpha''||} \\
\kappa &= \frac{||\alpha' \wedge \alpha''||}{||\alpha'||^3} \\
\tau &= -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{||\alpha' \wedge \alpha''||^2}
\end{aligned}
$$

Proposizione (Curve piane in coordinate cartesiane). *Sia* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ *una curva piana espressa in coordinate cartesiane,* $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ *con* $s \in I$. *Allora valgono le seguenti*

Formule di Frénet in coordinate cartesiane

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{(x', y')}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} \\
n &= \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} \\
\kappa &= \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Proposizione (Curve piane in coordinate polari). *Sia* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ *una curva piana espressa coordinate polari,* $\alpha(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ *con* $\theta \in I$, $I \subseteq [0, 2\pi]$. *Allora valgono le seguenti formule*

$$
\begin{aligned}
||\alpha'(\theta)|| &= \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} \\
s &= s_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2(\phi) + \rho'^2(\phi)}\, d\phi \\
\kappa(\theta) &= \frac{\rho^2(\theta) + 2\rho'^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta)}{(\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta))^{3/2}}
\end{aligned}
$$

[(†)] ovvero $P^t P = I_3$ e $\det(P) = 1$

Proposizione (Curve contenute in sfere)**.** *Sia* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regolare. Supponiamo che* $\kappa(s) \neq 0$ *e* $\tau(s) \neq 0$ *per ogni* $s \in I$*. Allora* $\alpha(I)$ *è contenuta in una sfera se e solo se*

$$R^2 + R'^2T^2 = costante$$

dove $R = 1/\kappa$ *e* $T = 1/\tau$*.*

Proposizione (Alcune proprietà notevoli delle curve)**.** *Sia* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regolare. Allora*

- $\kappa = 0$ *se e solo se* α *è una retta;*
- $\tau = 0$ *e* $\kappa \neq 0$ *se e solo se* α *è una curva piana;*
- $\kappa \neq 0$ *è costante se e solo se* α *è un tratto di circonferenza;*
- $\kappa \neq 0$ *e* $\tau \neq 0$ *sono costanti se e solo se* α *è un'elica circolare;*
- $\frac{\tau}{\kappa}$ *è costante se e solo se* α *è un'elica cilindrica;*
- $\frac{\tau}{\kappa} = (\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2})'$ *se e solo* α *è contenuta in una sfera.*

Proposizione (Alcune caratterizzazioni geometriche notevoli delle curve)**.** *Sia* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *una curva regolare. Allora*

i) *tutte le tangenti di* α *passano per un punto* P *fissato se e solo* α *è un tratto di retta;*
ii) *tutte le normali di* α *passano per un punto* P *fissato se e solo* α *è un tratto di circonferenza.*

Alcune Curve Notevoli

Curva	**Insiemi di definizione**	**Equazione**
Astroide	$\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(a\cos^3 t, a\sin^3 t\Big)$
Cardioide	$\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(a(1 - 2\cos t + \cos 2t), a(2\sin t - \sin 2t)\Big)$
Cicloide	$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\Big)$, $a \in \mathbb{R}$
Cissoide di Diocle	$\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\Big)$
Elica cilindrica	$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	$\alpha(t) = \Big(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\Big)$
Ellisse	$\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(a\cos t, b\sin t\Big)$
Folium di Cartesio	$\alpha\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\Big)$
Spirale di Archimede	$\alpha\colon [0, +\infty] \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(at\cos t, at\sin t\Big)$
Spirale logaritmica	$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t\Big)$, $a, b \in \mathbb{R}$
Trattrice	$\alpha\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$	$\alpha(t) = \Big(\sin t, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}\Big)$