ASSIOMI DELLA TEORIA DI ZERMELO–FRAENKEL

GIORGIO STEFANI

I *concetti primitivi* della Teoria di Zermelo–Fraenkel sono quelli di *insieme*, *appartenenza* $\in$ e *uguaglianza* $=$.

Assioma 1 (Assioma di estensionalità)**.** *Due insiemi aventi gli stessi elementi sono uguali:*

$$\forall x, y \forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y.$$

Assioma 2 (Assioma dell'insieme vuoto)**.** *Esiste un insieme che non contiene alcun elemento:*

$$\exists u \forall x (\neg x \in u).$$

Tale insieme si dice insieme vuoto *e si indica con* $\emptyset$*.*

Assioma 3 (Assioma della coppia)**.** *Dati due insiemi esiste un insieme che ha per elementi solo i due insiemi dati e loro due soltanto:*

$$\forall x, y \exists u \forall z (z \in u \longleftrightarrow z \in x \vee z \in y).$$

Assioma 4 (Assioma dell'unione)**.** *Dato un insieme, esiste un insieme che ha per elementi gli elementi contenuti in elementi dell'insieme dato:*

$$\forall x \exists u \forall z (z \in u \longleftrightarrow \exists y \in x (z \in y)).$$

Tale insieme si dice insieme unione *di* x *e si indica con* $\bigcup x$*.*

Assioma 5 (Assioma della potenza)**.** *Dato un insieme, esiste un insieme che ha per elementi tutti e soli i sottoinsiemi dell'insieme dato:*

$$\forall x \exists u \forall z (z \in u \longleftrightarrow z \subseteq x).$$

Tale insieme si dice insieme potenza *o* insieme delle parti *di* x *e si indica con* $\mathcal{P}(x)$*.*

Assioma 6 (Assioma di specificazione, di separazione o di isolamento)**.** *Sia* ϕ *una formula. Dato un insieme, è un insieme quello formato dagli elementi dell'insieme dato che soddisfano la proprietà espressa dalla formula* ϕ*:*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \in x \wedge \phi(z, \dots)),$$

dove la formula $\phi(z, \dots)$ *può avere altri parametri purché diversi da* y*. L'insieme* y *si indica ponendo* $y = \{z \in x | \phi(z, \dots)\}$*.*

Assioma 7 (Assioma di regolarità)**.** *Non esistono cicli chiusi di appartenenza:*

$$\neg \exists x_1 \dots \exists x_n (x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_1).$$

L'*Assioma di regolarità* è sostituito dall'*Assioma di fondazione.*

Assioma 8 (Assioma dell'insieme ereditario)**.** *Esiste un insieme ereditario:*

$$\exists u (\emptyset \in u \wedge \forall x (x \in u \longrightarrow x \cup \{x\} \in u))$$

Assioma 9 (Assioma di fondazione)**.** *Dato un insieme non vuoto, esiste un insieme disgiunto dall'insieme dato:*

$$\forall x \neq \emptyset \exists y \in x (y \cap x = \emptyset).$$

Assioma 10 (Assioma di scelta)**.** *Per ogni famiglia* $\{a_i\}_{i \in I}$*,* $I \neq \emptyset$*, di insiemi non vuoti,* $a_i \neq \emptyset$ *per ogni* $i \in I$*, esiste una funzione*

$$c \colon I \to \bigcup_{i \in I} a_i$$

tale che $c(i) \in a_i$ *per ogni* $i \in I$*.*

Assioma 11 (Assioma di rimpiazzamento)**.** *Sia* ϕ *una formula funzionale, cioè*

$$\forall x \forall y, z (y = z \longrightarrow \phi(x, y) = \phi(x, z)).$$

Allora

$$\forall x \exists y \phi(x, y, \dots) \longrightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \longleftrightarrow \exists x \in a \phi(x, y, \dots)),$$

dove la formula funzionale ϕ *può contenere altri parametri purché diversi da* b*.*