RACCOLTA DI ESERCIZI PER IL TUTORATO

GIORGIO STEFANI

Vi propongo questi esercizi per rafforzare la vostra preparazione per il corso del Professor Ricci. Se volete controllare l'esattezza delle vostre soluzioni, potete portarle al nostro incontro settimanale oppure potete passare direttamente nel mio ufficio. Non scriverò le soluzioni di questi esercizi. Lo svolgimento di questi esercizi non è obbligatorio.
Per ulteriori esercizi, vi consiglio i seguenti riferimenti:

- *Esercizi e complementi di analisi matematica* di E. Giusti, ed. Bollati Boringhieri, 1991, Voll. 1 e 2;
- *Principi di analisi matematica* di W. Rudin, ed. McGraw–Hill, 1991.

Aggiornerò questa raccolta a seconda delle vostre richieste e dell'andamento del tutorato. Questa è la versione **20170607**.

1. Teoria degli insiemi, topologia

Esercizio 1.1. Ad un torneo partecipano $n \in \mathbb{N}$ squadre, $n \geq 3$. Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Se una squadra vince una partita guadagna un punto, se la perde guadagna zero punti. Sappiamo che ci sono tre squadre A, B, C tali che A sconfigge B, B sconfigge C e C sconfigge A. Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti.

Esercizio 1.2. Siano A e B due insiemi e sia $f\colon A \to B$ una funzione. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(1) La funzione f è iniettiva.
(2) Per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A tali che $X \cap Y = \varnothing$, si ha che $f(X) \cap f(Y) = \varnothing$.
(3) Per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A, si ha che $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Esercizio 1.3. Si provi che gli insiemi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $B = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ hanno la medesima cardinalità.

Esercizio 1.4. Siano (X, τ), (X', τ') due spazi topologici con intersezione non vuota tali che $\tau|_{X \cap X'} = \tau'|_{X \cap X'}$. Dimostrare che esiste una topologia σ sull'insieme $X \cup X'$ tale che $\sigma|_X = \tau$, $\sigma|_{X'} = \tau'$. Dimostrare che, in generale, una tale topologia non è unica.

2. Successioni e limiti

Esercizio 2.1. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-4}{3n^2+8\cos n}$$
e verificare il risultato usando la definizione di limite.

Esercizio 2.2. Calcolare il valore $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ del seguente limite
$$L = \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2-n}\right)$$
e verificare la correttezza del risultato usando la definizione di limite.

Esercizio 2.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito il limite
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Provare allora che anche
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Esercizio 2.4. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, studiare la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da
$$a_n = \frac{1}{b^n}\binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2.5. La *formula di Stirling* afferma che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$. In questo esercizio proviamo una versione debole di questo risultato. Dimostrare che per ogni naturale $n \geq 2$ si ha che
$$0 < \log(n!) - (n\log n - n + 1) < \log n. \tag{$\star$}$$
Usare questa stima per calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$
Hint: provare ($\star$) stimando opportunamente $\int_1^n \log x \, dx$.

Esercizio 2.6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ponendo
$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + \alpha}{2a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Provare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e calcolarne il limite.

Esercizio 2.7. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ strettamente positivi. Supponiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista un triangolo T_n con lati di lunghezza a^n, b^n, c^n. Dimostrare che T_n è isoscele per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.8. Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, si dice che il prodotto infinito converge se

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_0 a_1 \cdots a_n$$

esiste finito. Si dimostrino le seguenti due affermazioni.

(1) Se $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad un numero reale non nullo, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
(2) Sia $a_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 1)$ converge.

3. Serie numeriche

Esercizio 3.1. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+7}; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(2n+1)}; \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Esercizio 3.2. Calcolare *esplicitamente* la somma delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)}.$$

Esercizio 3.3. Determinare *esplicitamente* una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strettamente positiva e infinitesima tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ renda vera la disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - a_n.$$

Esercizio 3.4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Si dica per quali $\alpha \geq 0$ la serie $\sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(n_1+n_2+1)^\alpha}$ converge.
(2) Si dica per quali $\alpha \geq 0$ la serie $\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3} \frac{1}{(n_1+n_2+n_3+1)^\alpha}$ converge.
(3) Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Si dica per quali $\alpha \geq 0$ la serie $\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k} \frac{1}{(n_1+n_2+\cdots+n_k+1)^\alpha}$ converge.

Esercizio 3.6. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali tali che $a_n \geq 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ una successione di numeri naturali tali che $I_{n+1} > I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Assumiamo che esista una costante $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Delta I_n}{\Delta I_{n-1}} \leq M,$$

dove $\Delta I_n = I_{n+1} - I_n$ è l'incremento finito di I_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare allora che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è converge se e solo se la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{I_n} \Delta I_n$ è convergente.

Esercizio 3.7. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali tali che $a_n > 0$ e $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare le seguenti due affermazioni.

(1) Se $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$, allora le serie

$$(\clubsuit) \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

sono convergenti.

(2) Se $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$, allora le serie in ($\clubsuit$) sono divergenti, ma la serie

$$(\clubsuit\clubsuit) \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{p-1} a_{n+1}}$$

è convergente per ogni $p \in (1, \infty)$.

Esercizio 3.8. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ due successioni. Supponiamo che

- la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente;
- la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sia divergente;
- la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n b_n$ sia convergente, dove $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Calcolare il valore di $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Disuguaglianze

Esercizio 4.1. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dati $x_1, \dots, x_n$ numeri reali non negativi, provare che

$$4 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Esercizio 4.2. Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano $x_1, x_2 \dots, x_n \geq 0$.

(1) Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n},$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(2) Dimostrare che, in realtà, vale la disuguaglianza
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x})^2,$$
ove $x = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$, con uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(3) Sia $n \geq 2$. Dimostrare che vale la disuguaglianza
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leq i<j\leq n}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2,$$
con uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Esercizio 4.3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$. Per ogni $x > -1$, dimostrare che
$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$
Hint: ridursi al caso $\alpha \in \mathbb{Q}$ e usare l'Esercizio 4.2.

Esercizio 4.4. Sia $n \in \mathbb{N}$. Per ogni reale $0 \leq x \leq 1$, dimostrare che
$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Esercizio 4.5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $1 \leq q \leq n$ e
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

Esercizio 4.6. Sia $\alpha \in (0,1]$. Dimostrare che $1 - x^\alpha \geq \alpha(1-x)$ per ogni $x \in [0,1]$.

5. Spazi metrici e funzioni Lipschitziane

Esercizio 5.1. Sia (X, d_X) uno spazio metrico e siano $A, B \subset X$. Provare che
(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(2) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, con inclusione che può essere stretta.

Esercizio 5.2. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione biiettiva e continua. Dimostrare che, se lo spazio metrico (X, d_X) è compatto, allora la funzione inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ è continua.

Esercizio 5.3. Sia (X, d_X) uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi chiusi non vuoti di X tali che
(1) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.

Dimostrare che esiste un unico $x \in X$ tale che $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$. Qui e nel seguito, il diametro di un insieme $A \subset X$ è definito ponendo $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d_X(x,y)$. Cosa succede se, invece di $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$, assumiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) > 0$?

Esercizio 5.4. Sia (X, d_X) uno spazio metrico con la seguente proprietà. Per ogni successione $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi chiusi non vuoti di X tali che

(1) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$;

esiste un unico $x \in X$ tale che $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$. Dimostrare che (X, d_X) è completo.

Esercizio 5.5. Sia (X, τ_X) uno spazio topologico e sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi compatti non vuoti di X tali che

$$K_{n+1} \subset K_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Esercizio 5.6. Sia (X, d) uno spazio metrico. Diciamo che $A \subset X$ è *recintato* in X se vale la seguente proprietà: per ogni $x \in X$ esiste $a_x \in A$ tale che

$$d(x, a') = d(x, a_x) + d(a_x, a') \qquad \forall a' \in A.$$

In tal caso, diciamo che a_x è un *cancello* per x in A.

(1) Provare che X e che ogni singoletto di X sono sottoinsiemi recintati in X (detti *recintati banali*). Costruire uno spazio metrico (X, d) contenente almeno un sottoinsieme recintato *non* banale. È vero che ogni spazio metrico contiene sempre un sottoinsieme recintato *non* banale?
(2) Provare che, se A è recintato in X, allora A è chiuso in X.
(3) Sia A recintato in X. Provare che, per ogni $x \in X$, esiste un unico cancello di x in A. Dimostrare inoltre che la funzione $\pi_A \colon X \to A$, che associa ad ogni punto il suo cancello in A, è continua e soddisfa
$$d(\pi_A(x), \pi_A(y)) \leq d(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$
(4) Siano $A_1, A_2 \subset X$ due recintati in X. Poniamo $B_1 = \pi_{A_1}(A_2)$ e $B_2 = \pi_{A_2}(A_1)$. Dimostrare che B_1 e B_2 sono due sottospazi metrici chiusi di X tra loro isometrici.

Esercizio 5.7. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$. Sia $L > 0$ e sia $\{f_i : i \in I\}$ una famiglia di funzioni $f_i \colon A \to \mathbb{R}$ *L-Lipschitziane* su A, cioè tali che

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in A, \quad \forall i \in I.$$

Provare che le funzioni

$$A \ni x \mapsto \inf_{i\in I} f_i(x) \qquad \text{e} \qquad A \ni x \mapsto \sup_{i\in I} f_i(x)$$

sono L-Lipschitziane su A se sono finite in almeno un punto.

Esercizio 5.8. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$. Sia $L > 0$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione L-*Lipschitziana* su A, cioè tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Dimostrare le seguenti due affermazioni.

(1) Esiste una funzione $F\colon X \to \mathbb{R}$ L-Lipschitziana su X tale che $F|_A = f$.
(2) Esistono due funzioni $m, M\colon X \to \mathbb{R}$ L-Lipschitziane su X tali che $m|_A = M|_A = f$ con la seguente proprietà: se $F\colon X \to \mathbb{R}$ è una funzione L-Lipschitziana su X tale che $F|_A = f$, allora $m \leq F \leq M$ su X.

Hint: usare l'Esercizio 5.7.

Esercizio 5.9 (Teorema delle contrazioni)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Sia $\lambda \in (0, 1)$ e sia $T\colon X \to X$ una λ-*contrazione*, cioè

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Provare che esiste un unico $x \in X$ tale che $T(x) = x$.

Esercizio 5.10. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $T\colon X \to X$ tale che

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in X,\ x \neq y.$$

Provare che esiste un unico $x \in X$ tale che $T(x) = x$.

Esercizio 5.11. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $T\colon X \to X$ una mappa continua. Assumiamo che

(1) $T(X)$ è un sottoinsieme compatto di X;
(2) per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in X$ tale che $d(T(x_\varepsilon), x_\varepsilon) < \varepsilon$.

Dimostrare che esiste $x \in X$ tale che $T(x) = x$.

Esercizio 5.12. Sia X un insieme e sia (Y, d_Y) uno spazio metrico. Sia $\varphi\colon X \to Y$ una funzione iniettiva. Definiamo la funzione $d_\varphi\colon X \times X \to [0, \infty)$ ponendo

$$d_\varphi(x, x') = d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \qquad \forall x, x' \in X.$$

Dopo aver verificato che (X, d_φ) è uno spazio metrico, si dimostri che (X, d_φ) è completo se e solo se $(\varphi(X), d_Y)$ è completo.

Esercizio 5.13. Sia (X,d) uno spazio metrico. Per ogni funzione $f\colon X\to\mathbb{R}$, definiamo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)| \in [0,\infty]$$

la sup-norma di f. Dimostrare che l'insieme

$$C_b(X;\mathbb{R}) := \{f\colon X\to\mathbb{R} : f\in C(X;\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty<\infty\}$$

dotato della sup-norma $\|\cdot\|_\infty$, è uno spazio di Banach.

Esercizio 5.14. Sia (X,d) uno spazio metrico. Dimostrare che esiste $\Phi\colon X\to C_b(X;\mathbb{R})$ tale che

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_\infty = d(x,y) \qquad \forall x,y\in X.$$

Esiste un'unica mappa Φ con questa proprietà?

Esercizio 5.15. Sia (X,d) uno spazio metrico. Supponiamo che $\mathrm{Card}(X)<\infty$. Definiamo $T(X)$ l'insieme di tutte le funzioni $f\colon X\to\mathbb{R}$ tali che

(a) per ogni $x,y\in X$, vale $f(x)+f(y)\ge d(x,y)$;
(b) per ogni $x\in X$, esiste $y\in X$ tale che $f(x)+f(y)=d(x,y)$.

Per ogni $f,g\in T(X)$, poniamo $\delta(f,g)=\max\limits_{x\in X}|f(x)-g(x)|$. Dimostrare che esiste una mappa $\Phi\colon X\to T(X)$ tale che

$$\delta(\Phi(x),\Phi(y)) = d(x,y) \qquad \forall x,y\in X.$$

Esercizio 5.16. Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione iniettiva e continua. Provare che esistono (finiti o infiniti) i limiti

$$f(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t), \qquad f(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} f(t).$$

Definiamo la funzione $d\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ ponendo

$$d(x,y) := |f(x)-f(y)|, \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Verificare che lo spazio $(\mathbb{R},d)$ è metrico. Provare che, se almeno uno tra $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$ è finito, allora lo spazio $(\mathbb{R},d)$ non è completo; in tal caso, trovarne il completamento.

Esercizio 5.17. Dimostrare che, a meno di isometrie, il completamento di uno spazio metrico è un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach.

Esercizio 5.18. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $x_0\in X$ fissato.

Parte 1. Definiamo $LC(x_0)$ l'insieme delle funzioni $f\colon X\to\mathbb{R}$ tali che

(a) esiste $k>0$ tale che $|f(x)-f(y)|\le k\,d(x,y)$ per ogni $x,y\in X$;
(b) vale $f(x_0)=0$.

Per ogni $f \in LC(x_0)$, poniamo
$$\|f\| := \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} : x \neq y,\ x, y \in X\right\}.$$
Dimostrare che $(LC(x_0), \|\cdot\|)$ è uno spazio lineare normato.

Parte 2. Definiamo $LC^*(x_0)$ l'insieme di tutte le funzioni lineari $l\colon LC(x_0) \to \mathbb{R}$ tali che
$$\|l\|_* := \sup\{|l(f)| : \|f\| \leq 1,\ f \in LC(x_0)\} < +\infty.$$
Dimostrare che $(LC^*(x_0), \|\cdot\|_*)$ è uno spazio di Banach.

Parte 3. Definiamo la mappa $\Phi\colon X \to LC^*(x_0)$ ponendo $\Phi(x) := \delta_x$, dove
$$\delta_x(f) = f(x) \qquad \forall f \in LC(x_0),\ x \in X.$$
Dimostrare che
$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_* = d(x,y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Parte 4. Dedurre che esiste un completamento dello spazio (X, d).

Parte 5. Dimostrare che due completamenti di (X, d) sono sempre isometrici.

Esercizio 5.19. Dimostrare che ogni spazio metrico compatto è separabile.

Esercizio 5.20 (Teorema di Baire)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti densi in X. Dimostrare che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un insieme denso in X.

6. Funzioni, continuità

Esercizio 6.1. Dimostrare che esistono delle funzioni $f_n, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(2) per ogni $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, la convergenza al punto (1) non è uniforme su (a, b).

Esercizio 6.2. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora f ha la proprietà dei valori intermedi: se $a, b \in I$ e $a < b$, allora per ogni y compreso tra $f'(a)$ e $f'(b)$ esiste $x \in (a, b)$ tale che $f'(x) = y$.

Esercizio 6.3 (Teorema di Ascoli-Arzelà)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $C(X;\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue su X a valori reali dotato della norma uniforme. Dimostrare che $\mathcal{F} \subset C(X;\mathbb{R})$ è compatto se e solo se è chiuso e si ha che

(i) per ogni $x \in X$, vale $\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| < \infty$;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}$,
$$d(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad x, y \in X.$$

Esercizio 6.4 (Teorema di Dini)**.** Sia (X,d) metrico compatto e siano $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni continue su X tali che

(i) per ogni $x \in X$, si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;
(ii) per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$.

Dimostrare che la convergenza al punto (i) è uniforme.

Esercizio 6.5. Sia $f \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $x \in [0,\infty)$, si abbia

$$\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0.$$

Dimostrare che, se f è continua, allora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Dimostrare che il viceversa è falso.
Hint: usare il Teorema di Baire (Esercizio 5.20).

7. Funzioni di più variabili, calcolo differenziale

Esercizio 7.1. Una funzione $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$. Data $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dimostrare che f è omogenea di grado α se e solo se, per ogni $x \neq 0$, si ha

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

Esercizio 7.2. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con interno non vuoto, $\mathrm{int}(K) \neq \varnothing$. Sia $f \colon K \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

(1) f è continua su K;
(2) f è differenziabile su $\mathrm{int}(K)$;
(3) f è costante su ∂K.

Dimostrare che esiste almeno un punto $x \in \mathrm{int}(K)$ tale che $\nabla f(x) = 0$.

Esercizio 7.3. Si consideri lo spazio $X = C([0,1])$ dotato della sup-norma. Provare che, per $\alpha > 0$, la mappa $T \colon X \to X$ definita ponendo

$$T(f)(x) = e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} f(t)\,dt$$

ha un unico punto fisso in X.

Esercizio 7.4. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con costante di Lipschitz $L = \mathrm{Lip}(f) < 1$. Dimostrare che la funzione $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$F(x,y) = (x + f(y), y + f(x)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

è iniettiva e suriettiva. È vero che $F^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è Lipschitziana?

Esercizio 7.5. Si consideri lo spazio $X = C([0,1])$ dotato della sup-norma. Definiamo la mappa $F\colon X \to \mathbb{R}$ ponendo

$$F(\phi) = \int \phi(t)^2 \, dt, \qquad \phi \in X.$$

Dimostrare che F è differenziabile in ogni $\phi \in X$ e calcolare $dF(\phi) \in \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$.

Esercizio 7.6. Siano $p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tali che gli n vettori

$$p_2 - p_1,\ p_3 - p_1,\ \dots,\ p_{n+1} - p_1$$

siano linearmente indipendenti. Allora il *simplesso* n-dimensionale generato dai punti $p_1, \dots, p_{n+1}$ è l'insieme

$$S(p_1, \dots, p_{n+1}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \, p_i : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dimostrare che $S(p_1, \dots, p_{n+1})$ è omeomorfo ad una palla chiusa.

Esercizio 7.7. Sia $S = S(p_1, \dots, p_{n+1}) \subset \mathbb{R}^n$ un simplesso n-dimensionale come definito nell'Esercizio 7.6.

Un *sottosimplesso* k-dimensionale, con $0 \leq k \leq n-1$, di S è un simplesso S' generato da $k+1$ punti distinti scelti nell'insieme $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$. I sottosimplessi $(n-1)$-dimensionali di S sono detti *facce* di S.

Una *suddivisione simpliciale* $\mathsf{P}(S)$ di S è una partizione di S in simplessi più piccoli (detti *celle* di S) tale che ogni coppia di celle o è disgiunta, o ha un sottosimplesso k-dimensionale, con $0 \leq k \leq n-1$, in comune.

Una *colorazione propria* di $\mathsf{P}(S)$ è una mappa dai vertici della suddivisione $\mathrm{P}(S)$ nell'insieme di colori $\{1, 2, \dots, n+1\}$ tale che i vertici di S abbiano $n+1$ colori diversi e i vertici di $\mathsf{P}(S)$ appartenenti ad una faccia $(n-1)$-dimensionale di S siano colorati usando solo i colori dei vertici di S che generano quella faccia.

Si dimostri il seguente risultato.

Lemma (Sperner, 1928)**.** *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ un simplesso n-dimensionale e sia $\mathsf{P}(S)$ una suddivisione simpliciale di S. Per ogni colorazione propria di $\mathsf{P}(S)$, esiste un numero dispari di* celle arcobaleno*, cioè celle di $\mathsf{P}(S)$ i cui vertici hanno tutti colori diversi.*

Hint. Provare il caso $n = 1$ separatamente e poi procedere per induzione su $n \geq 2$. Indicati con

- A il numero di celle arcobaleno in $\mathsf{P}(S)$;
- Q il numero di celle in $\mathsf{P}(S)$ con vertici colorati con tutti e soli i colori $\{1, 2, \dots, n\}$;
- F il numero di facce $(n-1)$-dimensionali contenute nella frontiera di S con vertici colorati con tutti e soli i colori $\{1, 2, \dots, n\}$;
- D il numero di facce $(n-1)$-dimensionali contenute nell'interno di S con vertici colorati con tutti e soli i colori $\{1, 2, \dots, n\}$;

dimostrare che F è dispari e $A + 2Q = F + 2D$.

Esercizio 7.8. Sia $\triangle_n \subset \mathbb{R}^n$ il simplesso n-dimensionale generato dai punti $(0,0,\dots,0)$, $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,\dots,1)$ e sia P una suddivisione simpliciale di $\triangle_n$ (vedi Esercizi 7.6 e 7.7). Sia $f\colon \triangle_n \to \triangle_n$ una funzione continua tale che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in \triangle_n$. Dimostrare che la funzione c dai vertici delle celle in P a valori in $\{1,2,\dots,n+1\}$ definita ponendo

$$c(x) := \begin{cases} i & \text{se } i \in \{1,2,\dots,n\} \text{ è il minimo indice tale che } f_i(x) < x_i, \\ n+1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

per ogni vertice x di una cella in P è una colorazione propria di P.

Esercizio 7.9 (Teorema di Brouwer, 1911)**.** Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ una palla chiusa. Se $f\colon B \to B$ è continua, allora esiste $x \in B$ tale che $f(x) = x$.
Hint: procedere per assurdo e applicare l'Esercizio 7.8.

8. Equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 8.1 (Teorema di Cauchy-Lipschitz generalizzato)**.** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ un insieme aperto, $(t_0, x_0) \in \Omega$ e $f \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che esistano $\delta, \varepsilon > 0$ tali che

$$U_{\delta,\varepsilon} := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$$

e, per ogni $(t,x),(t,y) \in U_{\delta,\varepsilon}$, si abbia

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L(t)|x-y|,$$

dove $L\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \to [0,+\infty)$ è una funzione con integrale convergente

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} L(t)\, dt < +\infty.$$

Dimostrare allora che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione locale.

Esercizio 8.2. Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$(\mathbf{P}) \qquad \begin{cases} x' = \sqrt{t} + \sqrt{|x|}, & t \ge 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che il Teorema di esistenza e unicità locale nelle ipotesi Lipschitz non può essere applicato al problema $(\mathbf{P})$.
(ii) Dimostrare che ogni soluzione del problema $(\mathbf{P})$ verifica $x(t) \ge \frac{2}{3}t^{3/2}$ per $t \ge 0$.
(iii) Dimostrare che il problema $(\mathbf{P})$ ammette un'unica soluzione locale in un opportuno sottoinsieme di $C^0([0,\delta])$ per un qualche $\delta > 0$ usando l'Esercizio 5.9.